SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Dina Lordan

MODELI FINANCIJSKIH TRŽIŠTA NA KONAČNIM VJEROJATNOSNIM PROSTORIMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc.Zoran Vondraček

Zagreb, veljača, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu opisat ćemo razne modele financijskog tržišta na konačnim vjerojatnosnim prostorima u diskretnom vremenu. Financijsko tržište je vrlo kompleksno. Promatramo financijsko tržište s $d + 1$ financijskom imovinom, to mogu biti dionice, obveznice, valuta ili novac, te se tom imovinom trži u diskretnom vremenu, to jest u trenucima $t = 0, 1, \ldots, T$, $T \in \mathbb{N}$. Uz primarne financijske imovine trži se i vrijednosnicama kao što su opcije ili slučajni zahtjevi. Kroz cijeli rad, u pozadini postoji konačni vjerojatnostni prostor koji se sastoji od uređene trojke $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ gdje je Ω proizvoljan, neprazan i konačan skup elemenatrnih događaja, familija $\mathcal{F}$ podskupova od Ω je sigma algebra događaja ($\sigma-$algebra) i $\mathbf{P} : \mathcal{F} \mapsto [0, 1]$ je funkcija vjerojatnosti na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$, a to je svaka $\sigma-$aditivna funkcija $\mathbf{P} : \mathcal{F} \mapsto [0, 1]$ takva da vrijedi $\mathbf{P}(\Omega) = 1$. Pretpostavka da je prostor elementarnih događaja Ω konačan pojednostavljuje stvari jer tada su svi prostori $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ konačnodimenzionalni što znači da se cijela funkcionalna analiza svodi na linearnu algebru.

U poglavlju 1 uz opis financijskog modela uvodimo pojam arbitraže. Arbitraža je portfelj koji nije izložen riziku i s pozitivnom vjerojatnošću donosi pozitivan profit što znači da uz neki početni ulog sigurno ne možemo izgubiti, te uz barem jedan scenarij ostvarujemo strogo pozitivnu dobit. Iz same definicije arbitraže, očito da u stvarnom životu je teško pronaći mogućnost arbitraže te je takvo tržište neefikasno. Zbog toga, razvijamo modele na financijskom tržištu bez arbitraže. Također, pretpostavljamo da ne postoje troškovi transakcija. Nadalje, uvest ćemo pojam martingala i martingalne mjere kako bismo na jednostavniji način provjerili da li je tržište bez arbitraže te iskaz i dokaz fundamentalnog teorema određivanja cijene imovine na financijskom tržištu bez arbitraže koji je od velike važnosti. U tu svrhu, uvodimo prostor slučajnih zahtjeva te nam je cilj odrediti ne-arbitražnu cijenu slučajnog zahtjeva. Vrijednost financijskih imovina modelirat ćemo u jedinicama *numéraira*. *Numéraire* je financijska imovina s kojom možemo trgovati i preko njega su izražene cijene svih ostalih imovina kojima se trguje. *Numéraire* nije jedinstven te ćemo pokazati koja se sve imovina može uzeti kao *numéraire* i što se događa kada promjenimo *numéraire*, to jest kada izaberemo neku novu jedinicu kojom izražavamo vrijednost imovine.

Nakon što smo opisali modele na financijskom tržištu, u poglavlju 2 promatramo funkciju korisnosti $U(x)$ agentovog bogatstva x u zadnjem vremenskom trenutku T. Želimo maksimizirati funkciju korisnosti, to jest pronaći optimalnu stategiju trgovanja za koju je funkcija korisnosti maksimalna. Problem maksimizacije riješavamo pomoću Lagrangeovog multiplikatora i dualne teorije koju ćemo detaljnije objasniti u samom poglavlju.

Glavni cilj rada je opisati modele na financijskom tržištu pomoću teorije iz područja matematike, ali dati i ekonomsku interpretaciju svega navedenog.

Za razumijevanje teorije ovog rada potrebno je ponoviti osnovne definicje iz područja vjerojatnosti i slučajnih procesa koje možete pronaći u literaturi [2] i [4].

Poglavlje 1

Modeli financijskih tržišta

1.1 Opis modela

Financijski model gradimo na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, gdje je prostor elementarnih događaja Ω konačan. To znači da se može dogoditi najviše konačno mnogo različitih scenarija u budućnosti. Dakle, pišemo $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$ za neki $N \in \mathbb{N}$. O elementarnim događajima $\omega \in \Omega$ razmišljamo kao o mogućim scenarijima u budućnosti. Nadalje, pretpostavljamo da su svi elementarni događaji zaista mogući to jest vrijedi $\mathbb{P}(\omega) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$. Iz pretpostavke slijedi da nam neće trebati rezultati iz funkcionalne analize koji se odnose na različite topologije u $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, jer su svi ti prostori jednostavno $\mathbb{R}^N$ (bez smanjenja općenitosti pretpostavljamo da je σ-algebra $\mathcal{F}$ partitivni skup od Ω). Stoga se cijela funkcionalna analiza, koju ćemo kasnije trebati za opise procesa u općenitom slučaju, za potrebe ovog poglavlja, svodi na jednostavnu linearnu algebru. Na primjer, umjesto Hanh-Banachovog teorema korišten je teorem o separirajućoj hiperravnini u konačnodimenzionalnom slučaju. Unatoč tome, pisati ćemo $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ itd., (iako znamo da su isti izomorfni sa $\mathbb{R}^N$) kako bismo naznačili koji funkcijski prostor uzimamo u smislu općenite teorije.

Na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ fiksiramo prirodni broj $T \geqslant 1$ te promatramo model u diskretnom vremenu u kojem se financijskom imovinom trži u trenutcima $t = 0, 1, ..., T$. Definiramo filtraciju $(\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ na Ω kao neopadajući niz σ-algebri sadržanih u $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset ... \subset \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}$. O σ-algebri $\mathcal{F}_t$ razmišljamo kao o informaciji o stanju svijeta koja nam je dostupna u vremenskom trenutku t. Još pretpostavljamo da u zadnjem vremenskom trenutku imamo potpunu informaciju odnosno vrijedi $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$, ali ne pretpostavljamo da je $\mathcal{F}_0$ trivijalna σ-algebra iako će u mnogim slučajevima ipak biti. Ali zbog "tehničkih" razloga mnogo je prikladnije dopustiti općenite σ-algebre $\mathcal{F}_0$.

Osim stvarnih vrijednosti financijskih imovina i portfelja koristit ćemo njihove diskontirane vrijednosti, to jest svedene na sadašnju vrijednost. Sada ćemo uvesti definiciju financijskog modela u stvarnim vrijednostima, a u ostatku poglavlja opisat ćemo kako model prikazati u diskontiranim vrijednostima što će se pokazati da nam je takav model jednostavniji za rad.

Definicija 1.1.1. *Model financijskog tržišta na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *je* $\mathbb{R}^{d+1}$ *dimenzionalni slučajni proces* $S = (S_t)_{t=0}^T = (S_t^0, S_t^1, ..., S_t^d)_{t=0}^T$ *adaptiran u odnosu na filtraciju* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, T = 0, 1, ..., T)$.
Pretpostavljamo da je nulta komponenta S^0 *strogo pozitivna, dakle* $(S_t^0) > 0$ *za sve* $t = 0, 1, ..., T$ *i zadovoljava* $S_0^0 = 1$.

Interpretacija je sljedeća: financijsko tržište se sastoji od $d + 1$ financijske imovine koje mogu bit dionice, obveznice, valuta ili novac. Cijenu i-te financijske imovine u trenutku t označavamo sa S_t^i. Budući da su cijene financijskih imovina općenito slučajne, pretpostavljamo da su i S_t^i slučajne varijable. Također pretpostavljamo da je slučajna varijabla S_t^i izmjeriva u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}_t$ (to jest da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $\{S_t^i \leq x\} \in \mathcal{F}_t$) jer cijena S_t^i ovisi samo o događajima koji su se dogodili do trenutka t. Dakle, slučajni vektor $S_t = (S_t^0, S_t^1 ..., S_t^d)$ zovemo vektor cijena svih imovina u trenutku t i on je $\mathcal{F}_t$-izmjeriv slučajni vektor jer je slučajna varijabla S_t^i $\mathcal{F}_t$-izmjeriva za sve indekse i. Iz čega slijedi da je slučajni proces S=$(S_t, t = 0, 1, ..., T)$ adaptiran u odnosu na filtraciju $\mathbb{F}$=$(\mathcal{F}_t, T = 0, 1, ..., T)$. Cijene financijskih imovina $0, 1, ..., d$ dane su u fiksnoj jedinici novca, na primjer Euro. Za $j = 1, 2, ..., d$ te cijene nisu nužno nenegativne (npr. forward ugovori). 0-ta imovina ima važnu ulogu. Pretpostavljamo da je strogo pozitivna i bit će korištena kao *numéraire*. To nam omogućuje da uspoređujemo novac (npr. u valuti Euro) u trenutku $t = 0$ (na početku) s novcem/vrijednošću u vremenu $t > 0$. Mnogi jednostavni modeli sadrže jednu nerizičnu imovinu i ona se najčešće označava kao imovina s indeksom 0 pa na S^0 možemo gledati jednostavno kao na novac uložen u banku uz fiksnu kamatnu stopu r pa vrijedi $S_t^0 = e^{rt}$. Naravno može biti i malo složenija, npr. $S_t^0 = exp(r_0 h + r_1 h + ... + r_{t-1} h)$, gdje je $h > 0$ označava duljinu vremenskog intervala između $t - 1$ i t, u ovom slučaju je ta razlika fiksna, i r_{t-1} je kamatna stopa u promatranom periodu od $t - 1$ do t. Postoje i drugačiji modeli, ali kako bismo se pripremili na općenitije slučajeve, zahtijevamo samo da je slučajna varijabla S_t^0 strogo pozitivna za svaki t. Također možemo primijetiti da zahtijevamo da je slučajna varijabla S_t^0 samo $\mathcal{F}_t$-izmjeriva, ali ne nužno i $\mathcal{F}_{t-1}$-izmjeriva. Drugim riječima, pretpostavljamo da je slučajni proces $S^0 = (S_t^0, t = 0, 1, ..., T)$ adaptiran u odnosu na filtraciju $\mathbb{F}$=$(\mathcal{F}_t, T = 0, 1, ..., T)$, ali ne nužno i predvidiv.
Ekonomski agent može kupiti ili prodati financijsku imovinu. Odluku koju će donijeti u trenutku t ovisi o informacijama koje su dostupne samo u vremenu t, to jest koje su sadržane u σ-algebri $\mathcal{F}_t$.

Definicija 1.1.2. *Strategija trgovanja, ili, dinamički portfelj je predvidiv slučajni proces* $(\widehat{H}_t)_{t=1}^T$= $(\widehat{H}_t^0, \widehat{H}_t^1, \ldots, \widehat{H}_t^d)_{t=0}^T$ *s vrijednostima u* $\mathbb{R}^{d+1}$.

$\widehat{H}_t^i$ označava broj jedinica i-te financijske imovine koju investitor posjeduje u portfelju u trenutku t odnosno vektor $(\widehat{H}_t)$= $(\widehat{H}_t^0, \widehat{H}_t^1, ..., \widehat{H}_t^d)$ označava koliko pojedinih financijskih imovina investitor posjeduje u trenutku t. Portfelj $\widehat{H}$ konstruiramo na sljedeći način: u trenutku $t = 0$ investirali bismo u financijske imovine tako da stvorimo portfelj $\widehat{H}_1 = (\widehat{H}_1^0, \widehat{H}_1^1, \ldots, \widehat{H}_1^d)$, zatim u trenutku $t = 1$ možemo rebalansirati portfelj i tako stvoriti novi portfelj $\widehat{H}_2 = (\widehat{H}_2^0, \widehat{H}_2^1, \ldots, \widehat{H}_2^d)$. U trenutku $t = 2$ saznajemo nove cijene S_2^i te rebalansiramo portfelj i konstruiramo novi portfelj $\widehat{H}_3$. Do trenutka T tržimo na taj način. Investitor donosi odluku u trenutku $t - 1$ koliko će jedinica i-te imovine posjedovati u trenutku t pa slijedi da je slučajna varijabla $\widehat{H}_t$ $\mathcal{F}_{t-1}$-izmjeriva. Dakle, prema definiciji predvidivog procesa, slijedi da je slučajni proces $\widehat{H} = (\widehat{H}_t, t = 1, ..., T)$ predvidiv u odnosu na filtraciju $\mathbb{F}$ =$(\mathcal{F}_t, t = 0, 1, ..., T)$.

Definicija 1.1.3. *Strategija* $(\widehat{H}_t)_{t=1}^T$ *je samofinancirajuća ako za svaki* $t = 1, 2, ..., T - 1$ *vrijedi*

$$(\widehat{H}_t, S_t) = (\widehat{H}_{t+1}, S_t), \tag{1.1}$$

gdje (,) predstavlja skalarni produkt u $\mathbb{R}^d$ *pa se gornja jednakost može zapisati na sljedeći način:*

$$\sum_{j=0}^{d} \widehat{H}_t^j S_t^j = \sum_{j=0}^{d} \widehat{H}_{t+1}^j S_t^j. \tag{1.2}$$

Nadalje, vrijednost portfelja $\widehat{H}$ *u trenutku* $t = 0$ *iznosi:*

$$V_0 = (\widehat{H}_1, S_0) = \sum_{j=0}^{d} \widehat{H}_1^j S_0^j. \tag{1.3}$$

Interpretacija je sljedeća: mijenjajući portfelj $\widehat{H}_t$ u $\widehat{H}_{t+1}$ nema input/outflow novca. Dakle, kada prilagođavamo svoju financijsku poziciju u trenutku t biramo novi portfelj $\widehat{H}_{t+1}$ te sredstva za kupovinu tog novog portfelja mogu doći samo iz vrijednosti $\widehat{H}_t$ koja je jednaka $\widehat{H}_t S_t$. Prema tome slijedi jednakost $(\widehat{H}_t, S_t) = (\widehat{H}_{t+1}, S_t)$ odnosno, u trenutku t, vrijednost novog portfelja $\widehat{H}_{t+1}$ mora biti jednaka vrijednosti starog portfelja $\widehat{H}_t$. Još naglasimo, pretpostavljamo da mijenjanje portfelja ne uzrokuje nikakve transakcijske troškove. Uočimo da $\widehat{H}_t^j$ može poprimiti i negativne vrijednosti što znači da smo tada "kratki" za j-tu imovinu (short sale imovine j).

Primijetimo da je slučajna varijabla definirana sa (1.1) $\mathcal{F}_t$-izmjeriva i nju interpretiramo kao vrijednost portfelja u trenutku $t = 1, 2, \ldots, T$. Dakle, vrijednost portfelja jednaka je sumi ukupnih vrijednosti uloženih u imovine:

$$V_t = (\widehat{H}_t, S_t) = (\widehat{H}_{t+1}, S_t).$$

Kako je V_t $\mathcal{F}_t$-izmjeriva slučajna varijabla za svaki t slijedi da je proces vrijednosti $V(\widehat{H}) = (V_t(\widehat{H}), t = 1, .., T)$ adaptiran slučajni proces.

Način na koji se vrijednost $V_t = (\widehat{H}_t, S_t)$ mijenja može se opisati jednostavnije kada, umjesto stvarnih vrijednosti financijskih imovina, koristimo njihove diskontirane vrijednosti koristeći imovinu S^0 kao *numéraire*. Diskontirane vrijednosti su vrijednosti svedene na sadašnju vrijednost pa možemo usporediti novac (vrijednost) u trenutku t sa novcem (vrijednošću) u trenutku 0. Npr. možemo reći da S_t^0 jedinica novca u trenutku t je jednako kao jedna jedinica novca, npr. Eura, u trenutku 0.
Stoga, zamijenimo cijene S sa njihovim diskontiranim vrijednostima:

$$\left(\frac{S}{S^0}\right) = \left(\frac{S^0}{S^0}, \frac{S^1}{S^0}, \ldots, \frac{S^d}{S^0}\right). \tag{1.4}$$

Koristit ćemo notaciju $\tilde{S}_t^j := \frac{S_t^j}{S_t^0}$, $j = 1, 2, \ldots, d$, $t = 0, 1, \ldots, T$, gdje tildom $\tilde{}$ označavamo diskontirane vrijednosti.
Primijetimo da je $\tilde{S}_t^0 = \frac{S_t^0}{S_t^0} = 1$ pa nema potrebe uključiti 0-tu koordinatu u diskontiranom procesu.
Neka je $(\widehat{H}_t)_{t=1}^T = (\widehat{H}_t^0, \widehat{H}_t^1, \ldots, \widehat{H}_t^d)_{t=1}^T$ samofinancirajuća strategija s početnom vrijednošću V_0 te $S_0^0 = 1$, tada vrijedi:

$$V_0 = \sum_{j=0}^{d} \widehat{H}_1^j S_0^j = \widehat{H}_1^0 + \sum_{j=1}^{d} \widehat{H}_1^j S_0^j = \widehat{H}_1^0 + \sum_{j=1}^{d} \widehat{H}_1^j \tilde{S}_0^j.$$

Ispuštanjem 0-te koordinate iz $\mathbb{R}^{d+1}$-dimenzionalnog procesa $(\widehat{H}_t)_{t=1}^T = (\widehat{H}_t^0, \widehat{H}_t^1, \ldots, \widehat{H}_t^d)_{t=1}^T$ dobivamo $\mathbb{R}^d$-dimenzionalni proces $(H_t)_{t=1}^T = (H_t^1, H_t^2, ..., H_t^d)_{t=1}^T$, odnosno vrijedi $\widehat{H}_t^j = H_t^j$ za $j = 1, 2, ..., d$. Ne pišemo 0-tu koordinatu iz razloga što držanjem $\widehat{H}_t^0$ jedinica *numéraire* imovine $\tilde{S}_t^0$ neće više biti od važnosti kada prijeđemo na diskontirane vrijednosti.

$\widehat{H}_t^0$ određuje sljedeću vrijednost $\widehat{H}_{t+1}^0$ za $t = 1, 2, ..., T-1$ uz induktivnu primjenu (1.2). Stroga pozitivnost od $(S_t^0)_{t=0}^{T-1}$ implicira da postoji točno jedna funkcija $\widehat{H}_{t+1}^0$ takva da jednakost (1.2) vrijedi. Očito je $\widehat{H}_{t+1}^0$ $\mathcal{F}_t$-izmjeriva slučajna varijabla. Dakle, za svaki $\mathbb{R}^d$-dimenzionalni proces $(H_t)_{t=1}^T = (H_t^1, H_t^2, ..., H_t^d)_{t=1}^T$ postoji jedinstveni samofinancirajući $\mathbb{R}^{d+1}$-dimenzionalni predvidivi proces $(\widehat{H}_t)_{t=1}^T = (\widehat{H}_t^0, \widehat{H}_t^1, \ldots, \widehat{H}_t^d)_{t=1}^T$ takav da vrijedi $(\widehat{H}_t^j)_{t=1}^T = (H_t^j)_{t=1}^T$ za $j = 1, 2, ...d$ i $H_1^0 = 0$. Ekonomski gledamo to znači da za svaku danu strategiju trgovanja $(H_t)_{t=1}^T = (H_t^1, H_t^2, ..., H_t^d)_{t=1}^T$ za "rizične" imovine $j = 1, 2..., d$ uvijek možemo pronaći strategiju trgovanja $(\widehat{H}_t^0)_{t=1}^T$ u *numérairu* imovine 0 tako da cijela strategija trgovanja postane samofinancirajuća. Nadalje, stavljanjem $\widehat{H}_1^0 = 0$, ta strategija postaje jedinstvena. Na primjer, kada za 0-tu financijsku imovinu uzmemo račun u banci (nerizična) u svakom trenutku $t = 1, 2, .., T - 1$, ulaganja u d rizičnih imovina te dobitci i gubici koji se ostvaruju ulaganjem u d rizičnih imovina se pokrivaju i financiraju pomoću te 0-te imovine. Ako vrijedi $H_1^0 = 0$, to jest ako startamo sa praznim novčanim računom, tada sljedeće stanje računa je jedinstveno određeno sa stanjem rizične imovine $1, 2, ..., d$. Dakle, ako točno znamo kako želimo ulagati u rizične imovine s početnim kapitalom V_0 onda uvijek možemo posuditi onoliko koliko nam treba iz banke da financiramo takvu strategiju.

Od sada, fiksiramo dva procesa
$(\widehat{H}_t)_{t=1}^T = (\widehat{H}_t^0, \widehat{H}_t^1, \ldots, \widehat{H}_t^d)_{t=1}^T$ i $(H_t)_{t=1}^T = (H_t^1, H_t^2, ..., H_t^d)_{t=1}^T$ koja jedinstveno određuju jedan drugoga na gore opisan način.
Nadalje, strategija $(\widehat{H}_t^0)_{t=1}^T$ ne mijenja diskontiranu vrijednost $(\tilde{V}_t)_{t=0}^T$ portfelja. Zaista, po definiciji, *numéraire* imovina ostaje ista u diskontiranim vrijednostima, to jest izražena u svojim jedinicama.

Stoga, diskontirana vrijednost portfelja:

$$\tilde{V}_t = \frac{V_t}{S_t^0}$$

ovisi samo o $\mathbb{R}^d$-dimenzionalnom procesu $(H_t)_{t=1}^T = (H_t^1, H_t^2, ..., H_t^d)_{t=1}^T$.
Preciznije, ako je $S_0^0 = 1$ i $\widehat{H}_1^0 = 0$ vrijedi:

$$V_0 = \tilde{V}_0 = \sum_{j=1}^d H_1^j \tilde{S}_0^j.$$

Označimo sa $\Delta\tilde{S}_{t+1} := \tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t$ razliku diskontiranih cijena financijskih imovina u trenutcima $t + 1$ i t te koristeći (1.2) računamo razliku diskontirane vrijednosti portfelja u trenutcima $t + 1$ i t:

$$\Delta\tilde{V}_{t+1} = \tilde{V}_{t+1} - \tilde{V}_t = \frac{V_{t+1}}{S_{t+1}^0} - \frac{V_t}{S_t^0} = \sum_{j=0}^d \widehat{H}_{t+1}^j \frac{S_{t+1}^j}{S_{t+1}^0} - \sum_{j=0}^d \widehat{H}_{t+1}^j \frac{S_t^j}{S_t^0} = \widehat{H}_{t+1}^0(1-1) + \sum_{j=1}^d \widehat{H}_{t+1}^j (\tilde{S}_{t+1}^j - \tilde{S}_t^j)$$

$$= (H_{t+1}^j, \Delta\tilde{S}_{t+1}^j),$$

gdje (,) predstavlja skalarni produkt u $\mathbb{R}^d$.

Posebno, diskontirana vrijednost portfelja u posljednjem trenutku T iznosi:

$$\tilde{V}_T = \tilde{V}_0 + \sum_{t=1}^T (H_t, \Delta\tilde{S}_t) = \tilde{V}_0 + (H \cdot \tilde{S})_T,$$

gdje je $(H \cdot \tilde{S})_T = \sum_{t=1}^{T}(H_t, \Delta\tilde{S}_t)$ notacija za "stohastički integral" koji se u našem diskretnom vremenu može jednostavno tumačiti kao konačna Riemannova suma.

Da bismo saznali stvarnu vrijednost portfelja V_T, moramo njezinu diskontiranu vrijednost pomnožiti sa S_T^0. Dakle, $V_T = \tilde{V}_T S_T^0$. Međutim to se rijetko traži.

Definicija 1.1.4. *Strategija H je dopustiva, ako je H samofinancirajuća i vrijedi $V_t(H) \geq 0$ za sve $t = 0, 1, \ldots, T$.*

Dakle, da bi strategija bila dopustiva njezina vrijednost u svakom trenutku t mora biti nenegativna što znači da u svakom trenutku t investitor mora biti u mogućnosti isplatiti svoje eventualne dugove. U suprotnom, strategija nije dopustiva.

Sada možemo zamijeniti definiciju 1.1.2 sa sljedećom definicijom u kojoj se koriste diskontirane vrijednosti, što će se pokazati da je mnogo jednostavnija za primjenu.

Definicija 1.1.5. *Neka je $\tilde{S} = (\tilde{S}^1, \ldots, \tilde{S}^d)$ model financijskog tržišta u diskontiranim vrijednostima. Strategija trgovanja je predvidivi $\mathbb{R}^d$-dimenzionalni proces $(H_t)_{t=1}^T = (H_t^1, H_t^2, ..., H_t^d)_{t=1}^T$, to jest H_t je $\mathcal{F}_{t-1}$-izmjeriva slučajna varijabla za svaki $t = 1, \ldots, T$. Familiju svih takvih strategija trgovanja označavamo sa $\mathcal{H}$.*
Nadalje, definiramo stohastički integral $H \cdot \tilde{S}$ kao $\mathbb{R}^d$-dimenzionalni proces $((H \cdot \tilde{S})_t)_{t=0}^T$ dan sa:

$$(H \cdot \tilde{S})_t = \sum_{u=1}^{t}(H_u, \Delta\tilde{S}_u), \ t = 0, \ldots, T, \tag{1.5}$$

gdje $(\ ,\ )$ predstavlja skalarni produkt u $\mathbb{R}^d$.
Slučajna varijabla $(H \cdot \tilde{S})_t = \sum_{u=1}^{t}(H_u, \Delta\tilde{S}_u)$ označava ukupni dobitak/gubitak, uz strategiju trgovanja H, do trenutka t u diskontiranim vrijednostima.
Slučajni proces $((H \cdot \tilde{S})_t)_{t=0}^T$ zovemo proces dobitka.

Dakle, ako sa cjenovnog procesa S prijeđemo na diskontirani cjenovni proces $\tilde{S}$ stvari postaju jednostavnije i više transparentne. Diskontirani vrijednosni proces $\tilde{V} = (\tilde{V}_t)_{t=1}^T$ uz početnu vrijednost $\tilde{V}_0 = 0$ je dan sa stohastičkim integralom $\tilde{V}_t = (H \cdot \tilde{S})_t$ definiranim u (1.5).

Naglasimo da izbor *numéraira* nije jedinstven, samo zbog jednostavnosti smo uzeli da to bude imovina indeksirana sa 0. Za *numéraire* se može uzeti bilo koja druga financijska imovina pod uvjetom da uvijek bude strogo pozitivna.

U daljnjem radu razvijat ćemo teoriju u terminima diskontiranog $\mathbb{R}^d$-dimenzionalnog procesa označenim sa $\tilde{S}$.

1.2 Nepostojanje arbitraže i fundamentalni teorem određivanja cijene imovine

Na stvarnom financijskom tržištu se uz primarne financijske imovine još trži i vrijednosnicama čija isplata ovisi na nelinearan način o primarim imovinama $S^0, S^1, ..., S^d$. Takve vrijednosnice nazivaju se izvedenim vrijednosnicama, opcijama ili slučajnim zahtjevima.

Definicija 1.2.1. *Slučajni zahtjev s dospijećem T je $\mathcal{F}_T$-izmjeriva slučajna varijabla C na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ takva da je*

$$0 \leq C < \infty \ \ \mathbf{P}\text{-}g.s.$$

Slučajni zahtjev C s dospijećem T zove se izvedenica (derivative) primarnih imovina $S^0, S^1, ..., S^d$ ako je C funkcija slučajnih vektora $S_1, S_2, ..., S_T$.

Kažemo da je slučajni zahtjev dostižan ako postoji dopustiva strategija H takva da je $V_T(H) = C$. Tada kažemo da strategija (portfelj) H replicira slučajni zahtjev C. Kažemo da je portfelj H super-replicirajući za slučajni zahtjev C ako vrijedi $V_T(H) > C$.
Prije nego što definiramo skupove koji će nam biti od velike važnosti tijekom cijelog rada, podsjetimo se da $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ označava linearan prostor svih $\mathcal{F}$-izmjerivih slučajnih varijabli sa realnim vrijednostima te je njegov pozitivni ortant $L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ linearan prostor takvih slučajni varijabli, ali sa pozitivnim realnim vrijednostima. Nadalje, $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ je linearan prostor integrabilnih slučajnih varijabli dok je $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ linearan prostor ograničenih slučajnih varijabli sa realnim vrijednostima.

Definicija 1.2.2. *Podprostor K od $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ definiran sa*

$$K = \{(H \cdot \tilde{S})_T | H \in \mathcal{H}\}$$

zovemo skup slučajnih zahtjeva dostižni po cijeni 0.

K je zapravo linearan prostor svih isplata koje se mogu generirati pomoću nekog portfelja uz pretpostavku da je početna vrijednost portfelja jednaka 0.
Ekonomski gledano interpretacija je sljedeća: slučajne varijable u formi $f = (H \cdot \tilde{S})_T$ su slučajni zahtjevi i promatramo ih kao funkcije isplate u trenutku T. Ovisno o događaju $\omega \in \Omega$, ekonomski agent može replicirati te slučajne zahtjeve uz početno investiranje u iznosu 0 slijedeći neku predvidivu strategiju H. Drugim riječima, portfelj H replicira slučajni zahtjev $f = (H \cdot \tilde{S})_T$ i takav portfelj zovemo replicirajući portfelj. Afini prostor $K_a = a + K$ je prostor dostižnih slučajnih zahtjeva po cijeni a, za neki realan broj a. Prostor K_a je dobiven pomicanjem prostora K za konstantnu funkciju a. Drugim riječima, K_a je prostor svih slučajnih varijabli u obliku $a + (H \cdot \tilde{S})_T$ za neku predvidivu strategiju trgovanja H.
Slično, ekonomski agent može replicirati te slučajne zahtjeve sa početnim investiranjem jednikim $a \in \mathbb{R}$ slijedeći neku predvidivu strategiju H.

Definicija 1.2.3. *Konveksni konus C iz prostora $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ definiran kao*

$$C = \{g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) | \text{ postoji } f \in K \text{ takva da } f \geq g\}$$

je skup super-replicirajućih slučajnih zahtjeva dostižni po cijeni 0.

Slučajni zahtjev $g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ je super-replicirajuć, ako ga možemo dostići s 0 neto investicijom uz neku predvidivu strategiju H. Kažemo da je portfelj H super-replicirajući za slučajni zahtjev g te u trenutku T imamo i nešto viška novca jer je krajnja vrijednost takvog portfelja veća od vrijednosti slučajnog zahtjeva. Činjenica da imamo višak novca kojeg se možemo riješiti da dođemo do g može izgledati čudno u ovom trenutku, ali ćemo vidjeti da definirani skup C ima veliku ulogu u razvoju naše teorije. Primijetimo još da konveksni konus C sadrži i negativni ortant $L^\infty_-(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, to jest slučajne varijable sa negativnim realnim vrijednostima.
Slično, konus $C_a = a + C$ nastaje pomicanjem konusa C za konstantnu funkciju a i predstavlja skup super-replicirajućih slučajnih zahtjeva čija je cijena jednaka realnom broju a.
Sada ćemo dati formalnu definiciju arbitraže, a onda slijede tvrdnje koje nam omogućuje lakši način da provjerimo postoji li arbitraža na financijskom tržištu. Naime, arbitraža je portfelj koji može ostvariti nerizičan profit. Matematički zapisano, portfelj H je arbitraža ako je $V_0(H) = 0$ te je $V_T(H) \geq 0$ $\mathbf{P} - g.s$ i vrijedi $\mathbf{P}(V_T(H) > 0) > 0$. Dakle, uz početni ulog jednak 0 (to je vrijednost portfelja u trenutku $t = 0$), sigurno ne možemo izgubiti te uz barem jedan scenarij konačna vrijednost portfelja je strogo pozitivna dok je za ostale scenarije veća ili jednaka 0. Naravno, to je san svakog investitora, ali takvo tržište je neefikasno i iz tog razloga promatramo modele tržišta koji ne dopuštaju arbitražu. Pomoću formalne definicije arbitraže je teško provjeriti da li model tržišta dopušta arbitražu jer bismo trebali provjeriti da svaki portfelj nije arbitraža. Stoga uvodimo sljedeću definiciju koja nam daje lakši način da to provjerimo.

Definicija 1.2.4. *Model $\tilde{S}$ financijskog tržišta zadovoljava ne-arbitražni uvjet ako vrijedi:*

$$K \cap L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = \{0\} \tag{1.6}$$

ili, ekvivalentno,

$$C \cap L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = \{0\}, \tag{1.7}$$

gdje 0 *predstavlja funkciju identično jednako* 0.

U presjeku linearnog prostora K i linearnog prostora slučajnih varijabli sa pozitivnim vrijednostima se nalazi 0, jer po definiciji arbitraže, jedino tada model tržišta nema mogućnost arbitraže. Mogućnost postojanje arbitraže znači da postoji portfelj H takav da sa početnim ulogom u iznosu 0 krajnja vrijednost slučajnog zahtjeva $f = (H \cdot \tilde{S})_T$ je ne-negativna i različita od nule. Ako model tržišta ne dopušta arbitražu, kažemo da zadovoljava ne-arbitražni uvjet kojeg označavamo sa (NA) uvjet.

Propozicija 1.2.5. *Pretpostavimo da financijsko tržište zadovoljava (NA) uvjet. Tada vrijedi:*

$$C \cap (-C) = K.$$

Dokaz. Treba dokazati da je $C \cap (-C) \subseteq K$ jer obrnuta inkluzija očito vrijedi. Dakle, neka je $g \in C \cap (-C)$. Tada se g nalazi u konusu C i $(-C)$ pa g možemo zapisati kao $g = f_1 - h_1$ pri čemu je $f_1 \in K$ i $h_1 \in L_+^\infty$ i $g = f_2 + h_2$ pri čemu je $f_2 \in K$ i $h_2 \in L_+^\infty$. Tada je $f_1 - f_2 = h_1 + h_2 \in L_+^\infty$. Dakle, $f_1 - f_2 \in K \cap L_+^\infty = \{0\}$ jer model $\tilde{S}$ zadovoljava (NA) uvjet. Slijedi, $f_1 = f_2$ i $h_1 + h_2 = 0$ pa je $h_1 = h_2 = 0$. To znači da je $g = f_1 = f_2 \in K$, što smo i trebali dokazati. □

U daljnjem radu baziramo se na modele tržišta bez arbitraže te kako bismo ih opisali uvodimo pojam martingalne mjere koja je još poznata kao mjera neutralna na rizik i pojam ekvivalentne martingalne mjere.

Definicija 1.2.6. *Za vjerojatnosnu mjeru $\boldsymbol{Q}$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ kažemo da je martingalna mjera ili mjera neutralna na rizik, ako za sve $t = 0, 1, \ldots, T$ vrijedi:*

$$\boldsymbol{E}_Q[\tilde{S}^i_{t+1} | \mathcal{F}_t] = \tilde{S}^i_t.$$

To jest, $\boldsymbol{Q}$ je martingalna mjera ako su u odnosu na nju diskontirane cijene financijskih imovina martingali. $\boldsymbol{Q}$ je ekvivalentna martingalna mjera ako je martingalna mjera i ako vrijedi $\boldsymbol{Q} \approx \boldsymbol{P}$.

Sa $\mathcal{M}^e(\tilde{S})$ označimo familiju svih martingalnih mjera za proces $\tilde{S}$ ekvivalentnih s $\mathbf{P}$ te sa $\mathcal{M}^a(\tilde{S})$ familiju svih martingalnih mjera koje nisu nužno ekvivalentne s $\mathbf{P}$.
Primijetimo, pretpostavili smo da je vjerojatnosni prostor Ω konačan na kojem je $\mathbf{P}(\{\omega\}) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$ pa vrijedi da je vjerojatnost $\mathbf{Q}$ ekvivalentna s $\mathbf{P}$ i pišemo $\mathbf{Q} \approx \mathbf{P}$ ako i samo ako je $\mathbf{Q}(\{\omega\}) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$.
Često ćemo mjeru $\mathbf{Q}$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ identificirati kao Radon-Nikodymovu derivaciju $\dfrac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Kako je vjerojatnosni prostor Ω konačan, vrijedi $\dfrac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}(\omega) = \frac{\mathbf{Q}[\omega]}{\mathbf{P}[\omega]}$.

Lema 1.2.7. *Neka je $\boldsymbol{Q}$ vjerojatnosna mjera na $(\Omega, \mathcal{F})$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) $\boldsymbol{Q} \in \mathcal{M}^a(\tilde{S})$,

(ii) $\boldsymbol{E}_Q[f] = 0$, *za sve* $f \in K$,

(iii) $\boldsymbol{E}_Q[g] \leq 0$, *za sve* $g \in C$.

Dokaz. Ekvivalencije su skoro pa trivijalne. Uvjet (*ii*) je ekvivalentan sa definicijom da je $\tilde{S}$ $\mathbf{Q}$-martingal to jest da vrijedi:

$$\mathbf{E}_Q[\tilde{S}_t|\mathcal{F}_{t-1}] = \tilde{S}_{t-1} \; za \; t = 1, \dots, T.$$

Zaista, gornja jednakost vrijedi ako i samo ako za svaki $\mathcal{F}_{t-1}$-izmjerivi događaj A vrijedi

$$\mathbf{E}_Q[\chi_A(\tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1})] = 0 \in \mathbb{R}^d$$

odnosno

$$\mathbf{E}_Q[x\chi_A, \Delta S_t] = 0 \in \mathbb{R}^d \; za \; svaki \; x.$$

Po linearnosti ova relacija se proteže do skupa K, što je ekvivalentno sa uvjetom (*ii*). Ekvivalencije (*ii*) i (*iii*) izravno slijede. □

Sada kada smo definirali potrebne pojmove i rezultate možemo navesti teorem koji je od velike važnosti u našoj teoriji. Govorimo o fundamentalnom teoremu određivanja cijene imovine na financijskom tržištu bez arbitraže. Za dokaz teorema trebat će nam rezultat iz algebre poznat kao teorem separacije.

Teorem 1.2.8. *Za financijski model $\tilde{S}$ na konačnom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T, \mathbf{P})$ sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) *$\tilde{S}$ zadovoljava (NA) uvjet*

(ii) $\mathcal{M}^e(\tilde{S}) \neq \emptyset$.

Dakle, model financijskog tržišta ne dopušta arbitražu ako i samo ako postoji ekvivalentna martingalna mjera.

Dokaz. Prvo dokazujemo lakši smjer. $(ii) \Rightarrow (i)$:
Neka je $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})$. Tada prema lemi 1.2.7 vrijedi $\mathbf{E}_Q[g] \leq 0$, za $g \in C$. Sada pretpostavimo suprotno od uvjeta (*i*), postoji g takav da $g \in C \cap L_+^\infty$, $g \neq 0$. Kako je $\mathbf{Q}$ ekvivalentna mjera s $\mathbf{P}$ te iz pretpostavke slijedi da je g strogo pozitivna slučajna varijabla mora vrijediti $\mathbf{E}_Q[g] > 0$ što je u kontradikciji s $\mathbf{E}_Q[g] \leq 0$. Dakle, $C \cap L_+^\infty = \{\emptyset\}$, to jest $\tilde{S}$ zadovoljava (NA) uvjet.
U dokazu drugog smjera koristit ćemo teorem o separirajućoj hiperavnini: Neka su K i C neprazni, disjunktni, konveksni podskupovi skupa $\mathbb{R}^n$. Neka je K kompaktan, a C zatvoren skup. Tada postoji $v \in \mathbb{R}^n$ i $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi:

$$\langle v, x \rangle < \gamma_1 < \gamma_2 < \langle v, y \rangle,$$

za sve $x \in K$ i $y \in C$. Dokaz $(i) \Rightarrow (ii)$:
Ova implikacija teorema je od velike važnosti jer će nam omogućiti da povežemo nearbitražni uvjet sa martingalnom teorijom. Neka vrijedi (NA) uvjet, $K \cap L_+^\infty = \{0\}$. Želimo

separirati disjunktne konveksne podskupove K i $L^\infty_+ \setminus \{0\}$ hiperravninom induciranu linearnim funkcionalom $\mathbf{Q} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Da bismo strogo separirali K i $L^\infty_+ \setminus \{0\}$ moramo biti malo pažljiviji budući da teorem separacije ne možemo direktno primijeniti. Jedan od načina da riješimo ovu poteškoću, u konačnoj dimenziji, je taj da na konveksnu ljusku gledamo kao na jedinične vektore $(\mathbf{1}_{\{\omega_n\}})_{n=1}^N$ iz $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ to jest definiramo skup:

$$\mathcal{P} := \Big\{ \sum_{n=1}^{N} \mu_n \mathbf{1}_{\{\omega_n\}} | \mu_n \geq 0, \sum_{n=1}^{N} \mu_n = 1 \Big\}.$$

$\mathcal{P}$ je konveksan, kompaktan podskup skupa $L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ i prema (NA) uvjetu disjunktan sa K, to jest vrijedi $\mathcal{P} \cap K = \emptyset$. Sada možemo strogo separirati konveksan, kompaktan podskup $\mathcal{P}$ i konveksan, zatvoren podskup K pomoću linearnog funkcionala $\mathbf{Q} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})^* = L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, to jest pronaći $\alpha < \beta$ tako da vrijedi:

$$(\mathbf{Q}, f) \leq \alpha \; za \; f \in K,$$

$$(\mathbf{Q}, h) \geq \beta \; za \; h \in \mathcal{P}.$$

Kako je K linearan prostor, imamo $\alpha \geq 0$ pa za α možemo uzeti $\alpha = 0$. Iz toga slijedi $\beta > 0$. Dakle, $(\mathbf{Q}, f) = 0$ za sve $f \in K$ i $(\mathbf{Q}, h) = \sum_{n=1}^N \mu_n \mathbf{Q}(\mathbf{1}_{\{\omega_n\}}) = \sum_{n=1}^N \mu_n \mathbf{Q}(\omega_n) > 0$ za $h \in \mathcal{P}$. Definiramo jedinični vektor $I = (1, 1, ..., 1) \in \mathcal{P}$. Tada vrijedi $(\mathbf{Q}, I) = \mathbf{Q}(\mathbf{1}_{\{\omega_n\}}) = \mathbf{Q}(\omega_n) > 0$, gdje I označava konstantnu funkciju jednaku 1 (dovoljno je uzeti $\mu_n \mathbf{1}_{\{\omega_n\}} = 1$ i $\mu_{n'} \mathbf{1}_{\{\omega_{n'}\}} = 0$ za sve ostale $n' = 1, \ldots, N$). Možemo normirati $\mathbf{Q}$ tako da definiramo

$$\mathbf{Q}^*(\omega_n) = \frac{\mathbf{Q}(\omega_n)}{\sum_{n \neq n'=1}^N \mathbf{Q}(\omega_{n'})}.$$

Tada vrijedi $(\mathbf{Q}^*, I) = 1$. Kako je $\mathbf{Q}$ strogo pozitivan za svaki $\mathbf{1}_{\{\omega_n\}}$, pronašli smo mjeru $\mathbf{Q}^*$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ ekvivalentnu sa $\mathbf{P}$. Nadalje, vrijedi za $f \in K$

$$\mathbf{E}^*[f] = (\mathbf{Q}^*, f) = \frac{1}{\sum_{n \neq n'=1}^N \mathbf{Q}(\omega_{n'})} (\mathbf{Q}, f) = 0,$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz uvjeta $(\mathbf{Q}, f) = 0$ za sve $f \in K$. Time smo dokazali da vrijedi uvjet (*ii*) u lemi 1.2.7. Drugim riječima, pronašli smo ekvivalentnu martingalnu mjeru pa vrijedi $\mathcal{M}^e(\tilde{S}) \neq \emptyset$. □

Teorem 1.2.8 je od velike važnosti u teoriji određivanja cijene i zaštite (hedge) vrijednosnih papir, ili, sinonimno, slučajnih zahtjeva, to jest elemenata prostora $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ s ne-arbitražnim uvjetima. Intuitivna interpretacija ovog rezultata je jednostavna. Martingal $\tilde{S}$ (s obziron na mjeru $\mathbf{P}$) je matematički model za savršeno fair igru. Primjenom bilo koje strategije trgovanja $H \in \mathcal{H}$ uvijek će vrijediti $\mathbf{E}[(H \cdot \tilde{S})_T] = 0$ to jest investitor ne može očekivati ni dobitak ni gubitak. S druge strane, model koji dopušta arbitražu je model za potpuno ne-fair (nepoštenu) igru: biranjem dobre strategije $H \in \mathcal{H}$, investitor je siguran od gubitka i sa strogo pozitivnom vjerojatnošću će ostvariti nekakvu dobit. Kaže se da će zaraditi "nešto iz ničega". U stvarnosti, postoji mnogo modela koji ne pripadaju niti jednom od ova dva ekstremna slučaja. Teorem nam govori da postoji oštra podijeljenost s obzirom na vjerojatnosnu mjeru. Svaki model je posve ne-fair u smislu da dopušta arbitražu i tada ne postoji mogućnost da mijenjajući vjerojatnosnu mjeru ikada postane fair odnosno da postane martingal. Dakle, u tom slučaju se ne može pronaći ekvivalentna mjera $\mathbf{Q}$. S druge strane, odbacivanjem ekstremnog slučaja u kojem modeli dopuštaju arbitražu, uvijek možemo prijeći sa vjerojatnosne mjere $\mathbf{P}$ na ekvivalentnu mjeru $\mathbf{Q}$ za koju je proces $\tilde{S}$ martingal to jest na potpuno fair igru. Primijetimo, $\mathbf{P}$ je stvarna, objektivna vjerojatnost, a $\mathbf{Q}$ je vjerojatnost neutralna na rizik. Činjenica da su te dvije vjerojatnosti ekvivalentne znači da se obje slažu u tome što je moguće, a što nije moguće. Dakle, zamjenom mjere $\mathbf{P}$ sa mjerom $\mathbf{Q}$ moguće je da se promijene vjerojatnosti, ali ne i nemogući događaji.

Korolar 1.2.9. *Neka financijski model $\tilde{S}$ zadovoljava (NA) uvjet i neka je $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ dostižan slučajni zahtjev. Drugim riječima, f zadovoljava:*

$$f = a + (H \cdot \tilde{S})_T, \tag{1.8}$$

za neki $a \in \mathbb{R}$ i neku strategiju H.
Tada, realan broj a i proces $(H \cdot \tilde{S})_t$ su jedinstveno zadani sa (1.8) i zadovoljavaju, za sve $\boldsymbol{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})$,

$$a = \boldsymbol{E}_Q[f] \quad i \quad a + (H \cdot \tilde{S})_t = \boldsymbol{E}_Q[f|\mathcal{F}_t],\ t = 0, 1, \ldots, T. \tag{1.9}$$

Dokaz. Jedinstvenost broja $a \in \mathbb{R}$: Pretpostavimo da postoje $a^1 \in \mathbb{R}$ i $a^2 \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi $a^1 \neq a^2$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi $a^1 > a^2$. Tada vrijedi $f = a^1 + (H^1 \cdot \tilde{S})_T$ i $f = a^2 + (H^2 \cdot \tilde{S})_T$, $a^1 \neq a^2$. Imamo $a^1 - a^2 = ((H^2 - H^1) \cdot \tilde{S})_T$ to jest dobili smo da je vrijednost strategije $H^2 - H^1$ strogo pozitivna (zbog $a^1 > a^2$) u trenutku T što je u kontradikciji sa (NA) uvjetom. Time smo dokazali jedinstvenost realnog broja a.

Jedinstvenost procesa $(H \cdot \tilde{S})$: Pretpostavimo da postoje dva različita procesa: $H^1 \cdot \tilde{S} \neq H^2 \cdot \tilde{S}$. Tada postoji $0 \leq t \leq T$ takav da $(H^1 \cdot \tilde{S})_t \neq (H^2 \cdot \tilde{S})_t$ te bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $A := \{(H^1 \cdot \tilde{S})_t > (H^2 \cdot \tilde{S})_t\}$ neprazan skup koji je očito iz $\mathcal{F}_t$. Prema pretpostavci da je $(H^1 \cdot \tilde{S})_T = (H^2 \cdot \tilde{S})_T$, strategija $H := (H^2 - H^1)\mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_{\langle t,T\rangle}$ je predvidivi proces koji dopušta arbitražu jer je $(H \cdot \tilde{S})_T = 0$ izvan A dok je $(H \cdot \tilde{S})_T = (H^1 \cdot \tilde{S})_t - (H^2 \cdot \tilde{S})_t > 0$ unutar A, što je opet u kontradikciji sa (NA) uvjetom.
Na kraju, jednakost (1.9) je rezultat činjenice da za svaki predvidivi proces H i za sve martingalne mjere $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^a(\tilde{S})$ vrijedi da je proces $H \cdot \tilde{S}$ $\mathbf{Q}$ − *martingal*.

□

Sa cone($\mathcal{M}^e(\tilde{S})$) i cone($\mathcal{M}^a(\tilde{S})$) označavamo konus generiran konveksnim skupom $\mathcal{M}^e(\tilde{S})$, odnosno $\mathcal{M}^a(\tilde{S})$. Sljedeća propozicija ističe dualnu vezu između spomenutih konusa i konusa C. Neka su (E, E') dva vektorska prostora u separiranoj dualnosti. To znači da postoji bilinearna forma $< \cdot, \cdot >: E \times E' \to \mathbb{R}$ tako da ako je $< x, x' >= 0$ za svaki $x \in E$, slijedi da je $x' = 0$. Isto tako, ako je $< x, x' >= 0$ za svaki $x \in E'$, slijedi da je $x = 0$. Za par vektorskih prostora (E, E') u separiranoj dualnosti sa skalarnim produktom $< \cdot, \cdot >$, polarni (dualni) skup C^0 skupa C u E definiran je sa

$$C^0 = \{g \in E' | \langle f, g \rangle \leq 1 \text{ za svaki } f \in C\}. \tag{1.10}$$

U slučaju kad je C zatvoren s obzirom na množenje skalarom (to jest kada je C konveksan konus), tada je C^0 ekvivalentno definiramo sa

$$C^0 = \{g \in E' | \langle f, g \rangle \leq 0 \text{ za svaki } f \in C\}. \tag{1.11}$$

Bipolarni teorem tvrdi da je bipolar $C^{00} := (C^0)^0$ skupa C u E jednak $\sigma(E, E')$ - zatvorena konveksna ljuska od C. U konačnodimenzionalnom slučaju gdje je $E = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P}) = \mathbb{R}^N$ i $E' = L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P}) = \mathbb{R}^N$, bipolarni teorem je jednostavniji. U ovom slučaju postoji samo jedna topologija na $\mathbb{R}^N$ kompatibilna sa strukturom vektorskog prostora, stoga ne moramo promatrati različite topologije kao što je $\sigma(E, E')$. Kako bilo, dokazi bipolarnog teorema u konačnodimenzionalnom i beskonačnodimenzionalnom slučaju su gotovo jednaki i slijede iz teorema o separirajućoj hiperravnini, odnosno Hanh-Banachovog teorema. Slijedi bipolarni teorem u konačnodimenzionalnom slučaju te dokaz u kojem ćemo koristiti teorem o separirajućoj hiperravnini.

Teorem 1.2.10. *Neka je $C \subseteq \mathbb{R}^n$ i sadrži 0. Tada je bipolar $C^{00} := (C^0)^0$ skupa C jednak zatvorenoj konveksnoj ljuski od C.*

Dokaz. Iz samo definicije slijedi da je C^{00} zatvoren, konveksni skup koji sadrži C pa je zatvorena konveksna ljuska skupa C koju označavamo sa A podskup skupa C^{00}. Sada pretpostavimo da ne vrijedi obrnuta inkluzija. Tada postoji $x_0 \in C$ koji se ne nalazu u A. Tada prema teoremu o separirajućoj hiperarvnini postoji vektor $v \in \mathbb{R}^n$ i $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi:

$$\langle x_0, v \rangle > \gamma_1 > \gamma_2 > \langle y, v \rangle,$$

za sve $y \in A$. Zbog $0 \in C \subseteq A$ slijedi $\gamma_1 > 0$. Kada gornji izraz podijelimo sa γ_1 slijedi da postoji vektor $v \in \mathbb{R}^n$ takav da vrijedi:

$$\langle x_0, v \rangle > 1 > \langle y, v \rangle,$$

za sve $y \in A$. Iz druge nejednakosti slijedi da je $v \in C^0$, a iz prve $x_0 \notin C^{00}$ što je u kontradikciji sa pretpostavkom. □

Sada prelazimo na konkretan slučaj konusa $C \subset L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Primjetimo da je u konačnodimenzionalnom slučaju C zatvoren kao algebarska suma zatvorenog linearnog prostora K (linearni prostor u $\mathbb{R}^N$ je uvijek zatvoren) i zatvorenog poliedarskog konusa u $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$. Iz bipolarnog teorema zaključujemo da je C jednak bipolaru C^{00}.

Propozicija 1.2.11. *Pretpostavimo da $\tilde{S}$ zadovoljava (NA) uvjet. Tada je polarni ili dualni konus skupa C jednak konusu cone$(\mathcal{M}^a(\tilde{S}))$ i $\mathcal{M}^e(\tilde{S})$ je gust skup u $\mathcal{M}^a(\tilde{S})$. Prema tome, sljedeće tvrdnje su ekvivalentne za slučajnu varijablu $g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$:*

(i) $g \in C$,

(ii) $\mathbf{E}_\mathbf{Q}[g] \leq 0$, *za sve* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^a(\tilde{S})$,

(iii) $\mathbf{E}_\mathbf{Q}[g] \leq 0$, *za sve* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})$.

Dokaz. Jednakost polarnog konusa C^0 i cone$(\mathcal{M}^a(\tilde{S}))$ slijedi iz leme 1.2.7 i činjenice da je $C \supseteq L^\infty_-(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ i $C^0 \subseteq L^1_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Prema tome, ekvivalencija (*i*) i (*ii*) slijedi iz bipolarnog teorema.
Prema fundamentalnom teoremu 1.2.8 postoji barem jedna mjera $\mathbf{Q}^* \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})$. Direktno iz definicije martingalne mjere vrijedi da konveksna kombinacija martingalnih mjera je ponovno martingalna mjera. Budući da je $\mathbf{Q}^*$ ekvivalentna martingalna mjera, kao vektor u $\mathbb{R}^N$ sve su joj komponente strogo pozitivne pa zato to isto vrijedi za konveksnu kombinaciju, koja je stoga ekvivalentna martingalna mjera. Dakle, za svaku mjeru $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^a(\tilde{S})$ i $0 < \mu \leq 1$ vrijedi $\mu\mathbf{Q}^* + (1-\mu)\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})$ iz čega očito slijedi da je $\mathcal{M}^e(\tilde{S})$ gust skup u $\mathcal{M}^a(\tilde{S})$. Naime, puštanjem $\mu \to 0$ slijedi da je $\mathbf{Q}$ limes ekvivalentnih martingalnih mjera, to jest ekvivalentne martingalne mjere su guste u skupu martingalnih mjera. Sada je jasno da vrijedi (*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*).
Dokažimo još obratno, (*iii*) $\Rightarrow$ (*ii*). Zbog tvrdnje o gustoći, za martingalnu mjeru $\mathbf{Q}$, postoji niz ekvivalentnih martingalnih mjera $\mathbf{Q}_n$ koji konvergira u $\mathbf{Q}$ (u $\mathbb{R}^N$ je to u stvari konvergencija po komponentama). Zato je

$$\mathbf{E}_\mathbf{Q}[g] = \lim_n \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_n}[g] \leq 0,$$

gdje zadnja nejednakost vrijedi jer smo pretpostavili da vrijedi tvrdnja (*ii*). Time smo dokazali sve potrebne ekvivalencije teorema.

□

Na sličan način, pokazujemo i sljedeće rezultate.

Propozicija 1.2.12. *Pretpostavimo da $\tilde{S}$ zadovoljava (NA) uvjet. Tada za slučajnu varijablu $f \in L^\infty$, sljedeće tvrdnje u ekvivalentne:*

(i) $f \in K$, *to jest* $f = (H \cdot \tilde{S})_T$ *za neku strategiju* $H \in \mathcal{H}$.

(ii) *Za sve* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})$ *vrijedi* $\mathbf{E_Q}[f] = 0$.

(iii) *Za sve* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^a(\tilde{S})$ *vrijedi* $\mathbf{E_Q}[f] = 0$.

Dokaz. U propoziciji 1.2.5 smo pokazali da je $f \in K$ ako i samo ako je $f \in C \bigcap (-C)$. Dakle f se nalazi i u konusu C i u $(-C)$ pa tvrdnje propozicije slijede jednostavno iz prethodne propozicije 1.2.11.

□

Korolar 1.2.13. *Pretpostavimo da* $\tilde{S}$ *zadovoljava (NA) uvjet i da slučajna varijabla* $f \in L^\infty$ *zadovoljava* $\mathbf{E_Q}[f] = a$ *za sve* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})$. *Tada je* f *jednak* $f = a + (H \cdot \tilde{S})_T$ *za neku strategiju* $H \in \mathcal{H}$.

Korolar 1.2.13 slijedi direktno iz prethodne propozicije primjenjene na $f - a \in L^\infty$.

Definicija 1.2.14. *Model tržišta bez arbitraže je potpun ako je svaki slučajni zahtjev dostižan.*

Korolar 1.2.15. *(**Potpuni model tržišta**) Za model tržišta* $\tilde{S}$ *bez arbitraže, sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) *skup* $\mathcal{M}^e(\tilde{S})$ *je jednočlan (postoji jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera)*

(ii) *svaki slučajni zahtjev* $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *se može prikazati kao* $f = a + (H \cdot \tilde{S})_T$ *za neki realan broj* a *i strategiju* $H \in \mathcal{H}$.

U tom slučaju vrijedi jednakost $a = \mathbf{E_Q}[f]$, *stohastički integral* $H \cdot \tilde{S}$ *je jedinstven te*

$$\mathbf{E_Q}[f|\mathcal{F}_t] = \mathbf{E_Q}[f] + (H \cdot \tilde{S})_t, \quad t = 0, \ldots, T.$$

Iz korolara 1.2.15 slijedi da je model tržišta bez arbitraže potpun ako i samo ako postoji jedinstvena ekvivalentna mjera.

Pomoću fundamentalnog teorema određivanja cijena imovine dokazati ćemo sljedeću propoziciju koja će nam trebati uskoro u daljnjem radu.

Propozicija 1.2.16. *Neka* $\tilde{S}$ *zadovoljava (NA) uvjet i neka je* $H \cdot \tilde{S}$ *slučajni proces gdje je* $\tilde{S}$ *slučajni proces i* $H \in \mathcal{H}$ *neka fiksna strategija trgovanja. Definiramo proces* $\tilde{S}^{d+1} = (\tilde{S}^{d+1}_t)_{t=0}^T$ *sa* $\tilde{S}^{d+1} = a + H \cdot \tilde{S}$, *gdje je* a *neki fiksi realan broj. Tada proces* $\bar{S} = (\tilde{S}^1, \tilde{S}^2, \ldots, \tilde{S}^d, \tilde{S}^{d+1})$ *također zadovoljava (NA) uvjet te se skupovi* $\mathcal{M}^e(\tilde{S})$ *i* $\mathcal{M}^e(\bar{S})$ *te također* $\mathcal{M}^a(\tilde{S})$ *i* $\mathcal{M}^a(\bar{S})$ *podudaraju.*

Dokaz. Prema pretpostavci model tržišta $\tilde{S}$ zadovoljava (NA) uvjet pa prema fundamentalnom teoremu određivanja cijene imovine slijedi da postoji ekvivalentna martingalna mjera $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})$. Ako je $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})$ tada je proces $H \cdot \tilde{S}$ $\mathbf{Q}$-martingal kao martingalna transformacija predvidivog procesa H i martingala $\tilde{S}$ iz čega slijedi da je i $\tilde{S}^{d+1}$ $\mathbf{Q}$-martingal. Dakle, ekvivalentna martingalna mjera za proces $\tilde{S}$ je također ekvivalentna martingalna mjera za proces $\bar{S}$ pa su te dvije familije jednake te kako postoji barem jedna ekvivalentna martingalna mjera slijedi iz fundametnalnog teorema da i $\bar{S}$ zadovoljava (NA) uvjet. □

1.3 Ekvivalencija jednoperiodnog modela i višeperiodnog modela bez arbitraže

Cilj ovog potpoglavlja je povezati financijski model sa jednim periodom i model sa više perioda na financijskom tržištu bez arbitraže. Jednoperiodni model je model u kojem se može trgovati imovinom u dva vremenska trenutka: $t = 0$ kojeg možemo shvatiti kao sadašnjost i $t = 1$ to jest neko fiksno vrijeme u budućnosti. Između ta dva trenutka imamo jedan period otkud ime modelu. Sa višeperiodnim modelom smo se susreli u samom početku, financijskom imovinom se trži u trenutcima $t = 0, 1, ..., T$, $T \in \mathbb{N}$. Također, dat ćemo nešto detaljnije informacije o familiji mjera neutralnih na rizik. U financijskoj literaturi takav izraz se često uzima kao sinonim za martingalne mjere. Prije svega, podsjetimo se da ne pretpostavljamo da je $\mathcal{F}_0$ trivijalna σ-algebra.

Prije glavnih rezultata ovog potpoglavlja navodimo lemu koja povezuje svojstvo martingalnosti i ekvivalentnih vjerojatnosnih mjera.

Neka su $\mathbf{P}$ i $\mathbf{Q}$ ekvivalentne vjerojatnosne mjere, te neka je $\rho = (\rho_t)$ odgovarajući proces gustoće to jest martingal kojeg definiramo kao $\rho_t := \mathbf{E}[d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}|\mathcal{F}_t]$.

Lema 1.3.1. *Slučajni proces M je $\boldsymbol{Q}$-martingal ako i samo ako je ρM $\boldsymbol{P}$-martingal.*

Propozicija 1.3.2. *Ako financijski model $\tilde{S}$ zadovoljava ne-arbitražni uvjet te $\boldsymbol{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$ je ekvivalentna martingalna mjera i $Z_t = \boldsymbol{E}\left[\frac{d\boldsymbol{Q}}{d\boldsymbol{P}}|\mathcal{F}_t\right]$ je proces gustoće vjerojatnosti $\boldsymbol{Q}$, tada proces $L_t = \frac{Z_t}{Z_0}$ definira proces gustoće ekvivalentne mjere $\boldsymbol{Q}'$ takav da vrijedi $\frac{d\boldsymbol{Q}'}{d\boldsymbol{P}} = L_T$, $\boldsymbol{Q}' \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})$ i $\boldsymbol{Q}'|_{\mathcal{F}_0} = \boldsymbol{P}|_{\mathcal{F}_0}$.*

Dokaz. Slučajni proces $\tilde{S}$ je $\mathbf{Q}$ – *martingal* te je Z odgovarajući proces gustoće pa iz prethodne leme 1.3.1 slijedi da je $\tilde{S}Z$ $\mathbf{P}$-martingal. Kako je $Z_0 > 0$ i $\mathcal{F}_0$-izmjeriva slijedi da je proces $\tilde{S}\frac{Z}{Z_0}$ i dalje $\mathbf{P}$-martingal. Sada je proces $\tilde{S}L$ $\mathbf{P}$-martingal i $L_T > 0$ pa nužno slijedi da je $\mathbf{Q}' \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})$. $\mathbf{Q}'|_{\mathcal{F}_0} = \mathbf{P}|_{\mathcal{F}_0}$ vrijedi jer je $L_0 = 1$. □

Teorem 1.3.3. *Neka je $\tilde{S} = (\tilde{S}_t)_{t=0}^T$ cjenovni proces. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) Model tržišta $\tilde{S}$ ne dopušta arbitražu.

(ii) Za svaki $0 \leq t < T$, jednoperiodni model $(\tilde{S}_t, \tilde{S}_{t+1})$ uz filtraciju $(\mathcal{F}_t, \mathcal{F}_{t+1})$ ne dopušta arbitražu.

Dokaz. Očito (i) implicira (ii) jer u jednoperiodnom modelu postoji manji broj strategija nego u višeperiodnom modelu. Stoga moramo dokazati da (ii) implicira (i). Ako primijenimo fundamentalni teorem na $(\tilde{S}_t, \tilde{S}_{t+1})$ slijedi da za svaki t postoji vjerojatnosna mjera $\mathbf{Q}_t$ na $\mathcal{F}_{t+1}$ ekvivalentna s $\mathbf{P}$. Stoga je proces $(\tilde{S}_t, \tilde{S}_{t+1})$ $\mathbf{Q}_t$-martingal, to jest vrijedi $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_t}[\tilde{S}_{t+1}|\mathcal{F}_t] = \tilde{S}_t$. Prema propoziciji 1.3.2 vrijedi $\mathbf{Q}_t|_{\mathcal{F}_t} = \mathbf{P}|_{\mathcal{F}_t}$. Neka je sada $f_{t+1} = \frac{d\mathbf{Q}_t}{d\mathbf{P}}$, definiramo $L_t = f_1 \cdots f_{t-1} \cdot f_t$ i $L_0 = 1$. Očito je $(L_t)_{t=0}^T$ proces gustoće uz ekvivalentnu mjeru $\mathbf{Q}$ definirane sa $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = L_T$. Sada se lagano pokaže da za svaki $t = 0, 1, ..., T$ vrijedi $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[\tilde{S}_{t+1}|\mathcal{F}_t] = \tilde{S}_t$ to jest $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$. Pronašli smo ekvivalentnu martingalnu mjeru iz čega slijedi da model $\tilde{S}$ ne dopušta arbitražu. □

Dat ćemo još jedan pokazatelj zašto je jako mala razlika između modela s jednim periodom i T-periodom. Kao u teoremu 1.3.3 definiran proces $\tilde{S} = (\tilde{S}_t)_{t=0}^T$, možemo usporediti s jednoperiodnim procesom $\widehat{S} = (\widehat{S}_t)_{t=0}^1$ koji je adaptiran s obzirom na filtraciju $(\widehat{\mathcal{F}_0}, \widehat{\mathcal{F}_1}) := (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_T)$ na sljedeći način: izaberemo bilo koju kolekciju $(f_1, ..., f_m)$ na konačno dimenzionalnom linearnom prostoru K definiranim u (1.2.2) koja linearno razapinje prostor K. Definiramo $\mathbb{R}^m$-dimenzionalni proces $\widehat{S}$ sa $\widehat{S}_0 = 0$, $\widehat{S}_1 = (f_1, ..., f_m)$. Takav proces $\widehat{S}$ očito daje isti prostor K kao i $\tilde{S}$. Dakle, familije ekvivalentnih martingalnih mjera za proces $\tilde{S}$ i proces $\widehat{S}$ se podudaraju pa i sve tvrdnje koje smo naveli za familiju ekvivalentnih mjera za $\tilde{S}$ su iste za $\widehat{S}$. Posebno, $\tilde{S}$ i $\widehat{S}$ daju iste ne-arbitražne cijene financijskih izvedenica, što ćemo pokazati u sljedećem odjeljku.
Ekonomski gledano prijelaz sa $\tilde{S}$ na proces $\widehat{S}$ se čita kao: ako fiksiramo strategiju trgovanja H^j koja daje vrijednost $f_j = (H^j \cdot S)_T$, na f_j možemo gledati kao na slučajni zahtjev u vremenskom trenutku $t = T$ koji se može kupiti po cijeni 0 u trenutku $t = 0$ te onda primjenjivati pravilo trgovanja dano sa H^j. Uzimanjem dovoljno mnogo takvih strategija H^j, u smislu da i odgovarajući $f_j - ovi$ linearno razapinju prostor K, krajnja vrijednost $f = (H \cdot \tilde{S})_T$ bilo koje strategije trgovanja H možemo prikazati kao linearnu kombinaciju odgovarajućih $f_j - ova$. Ovim smo pokazali, kada je Ω konačan skup, kako s matematičkog tako i sa ekonomskog gledišta, da se model sa T-periodom može na jednostavan način reducirati na model s jednim periodom.

Slijedi potpoglavlje u kojem ćemo dati definiciju ne-arbitražne cijene slučajnih zahtjeva te pokazati što načelo ne-arbitraže na financijskom tržištu podrazumijeva o mogućim cijenama slučajnog zahtjeva f.

1.4 Ne-arbitražna cijena slučajnog zahtjeva

Za dani slučajni zahtjev $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, realni broj a je ne-arbitražna cijena slučajnog zahtjeva f, ako se ne stvara mogućnost arbitraže kada modelu financijskog tržiša $\tilde{S}$ dodamo slučajni zahtjev f kao novu financijsku imovinu sa cijenom a. Dakle, proširujemo financijsko tržište uvođenjem novog financijskog instrumenta koji se može kupiti/prodati po cijeni $a \in \mathbb{R}$ u vremenskom trenutku $t = 0$ i donosi slučajni novčani tok (vrijednost) $f(\omega)$ u trenutku $t = T$. Ne zahtjevamo ništa oko cijene tog financijskog instrumenta u međuvremenu $t = 1, 2, ..., T-1$. Ako pogledamo vektor $(f-a)$ i linearan prostor generiran sa K, proširujemo K sa dostižnim zahtjevima i dobivamo prostor $K^{f,a}$. Cijena a mora biti takva da arbitražna mogućnost ne postoji. Matematički gledano to znači da i dalje mora vrijediti (NA) uvjet, to jest $K^{f,a} \cap L_+^\infty = \{0\}$. Tada kažemo da je realan broj a ne-arbitražna cijena za slučajni zahtjev f.

Teorem 1.4.1. *Pretpostavimo da model $\tilde{S}$ zadovoljava (NA) uvjet i neka je $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ slučajni zahjtev. Nadalje, definiramo:*

$$\pi^\downarrow(f) = \inf\{\boldsymbol{E_Q}[f] | \boldsymbol{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})\} \tag{1.12}$$

$$\pi^\uparrow(f) = \sup\{\boldsymbol{E_Q}[f] | \boldsymbol{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})\}. \tag{1.13}$$

U slučaju kada je $\pi^\downarrow(f) = \pi^\uparrow(f)$ tada je slučajni zahtjev f dostižan po cijeni $\pi(f) := \pi^\downarrow(f) = \pi^\uparrow(f)$, to jest vrijedi $f = \pi(f) + (H \cdot S)_T$ za neku strategiju trgovanja $H \in \mathcal{H}$ i $\pi(f)$ je jedinstvena ne-arbitražna cijena za f.
Ako je $\pi^\downarrow(f) < \pi^\uparrow(f)$, u tom slučaju realan broj a je nearbitražna cijena za f ako i samo ako a leži u otvorenom intervalu $\langle \pi^\downarrow(f), \pi^\uparrow(f) \rangle = \{\boldsymbol{E_Q}[f] | \boldsymbol{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})\}$.

Dokaz. U slučaj kada je $\pi^\downarrow(f) = \pi^\uparrow(f)$ skup $\{\mathbf{E_Q}[f] | \mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})\}$ je jednočlan i označimo ga sa $\pi(f) = \mathbf{E_Q}[f]$. Ta jednakost ne ovisi o $\mathbf{Q}$ pa vrijedi za sve $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})$. Sada iz korolara 1.2.13 slijedi tvrdnja $f = \pi(f) + (H \cdot S)_T$ za neku strategiju trgovanja $H \in \mathcal{H}$. Prelazimo na dokaz u slučaju kada je $\pi^\downarrow(f) < \pi^\uparrow(f)$.
Skup ekvivalentnih martingalnih mjera $\mathcal{M}^e(\tilde{S})$ je konveksan to jest vrijedi: ako su $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})$ *i* $\lambda \in [0, 1]$, tada je $\mathbf{Q}_3 := \lambda \mathbf{Q}_1 + (1-\lambda)\mathbf{Q}_2 \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})$. Zbog $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_3}[f] = \lambda \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_1}[f] + (1-\lambda)\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_2}[f]$ slijedi da je skup $\{\mathbf{E_Q}[f] | \mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})\}$ konveksan. Jasno je da je taj skup omeđen i neprazan, a neprazan, konveksan, omeđen podskup od $\mathbb{R}$ je nužno interval. Dakle, preostaje dokazati da je to otvoren interval. Označimo taj skup sa I te tvrdimo da realan broj a pripada intervalu I ako i samo ako je a ne-arbitražna cijena za slučajni zahtjev f. Zaista, ako pretpostavimo da je $a \in I$, tada postoji $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})$ tako da vrijedi $a = \mathbf{E_Q}[f]$ to jest $\mathbf{E_Q}[f-a] = 0$ iz čega slijedi $K^{f,a} \cap L_+^\infty = \{0\}$ odnosno a je ne-arbitražna cijena za f. Obratno, ako pretpostavimo $K^{f,a} \cap L_+^\infty = \{0\}$ odnosno da je a ne-arbitražna cijena za f tada na isti način kao i u dokazu fundamentalnog teorema 1.2.8 možemo pronaći mjeru $\mathbf{Q}$ tako

da vrijedi $\mathbf{E_Q}[g] = 0$ za sve $g \in K^{f,a}$ i tako da je mjera $\mathbf{Q}$ ekvivalentna s $\mathbf{P}$. Ovo, naravno, implicira da je $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$ i $a = \mathbf{E_Q}[f]$.
Još trebamo dokazati da je I otvoren interval. Pretpostavimo da je a jednak desnoj granici intervala I to jest $a = \pi^{\uparrow}(f)$ i promatramo slučajni zahtjev $f - \pi^{\uparrow}(f)$. $\pi^{\uparrow}(f)$ je definiran kao supremum skupa I pa vrijedi $\mathbf{E_Q}[f - \pi^{\uparrow}(f)] \leq 0$, za sve $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$ te prema propoziciji 1.2.12 slijedi $f - \pi^{\uparrow}(f) \in C$. Dakle, možemo pronaći $g \in K$ takav da je $g \geq f - \pi^{\uparrow}(f)$. Ako je supremum iz (1.13) dostižan to jest ako postoji $\mathbf{Q}^* \in \mathcal{M}^e(S)$ tako da vrijedi $\mathbf{E_{Q^*}}[f] = \pi^{\uparrow}(f)$, tada imamo $0 = \mathbf{E_{Q^*}}[g] \geq \mathbf{E_{Q^*}}[f - \pi^{\uparrow}(f)] = 0$ iz čega slijedi, s obzirom da je $\mathbf{Q}^*$ ekvivalentna sa $\mathbf{P}$, $f - \pi^{\uparrow}(f) \equiv g$. Drugim riječima, to znači da je f dostižan po cijeni $\pi^{\uparrow}(f)$. Iz toga slijedi da je $\mathbf{E_Q}[f] = \pi^{\uparrow}(f)$ za sve $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$ pa I sadrži samo jedan član $\{\pi^{\uparrow}(f)\}$. Budući da smo pretpostavili da je $\pi^{\downarrow}(f) < \pi^{\uparrow}(f)$, $\pi^{\uparrow}(f)$ ne može pripadati inervalu I što znači da je I otvoren s desne strane.
Ako umjesto f promatramo $-f$ dolazimo do analognog rezultata za lijevu granicu $\pi^{\downarrow}(f)$ intervala I iz čega slijedi da je I otvoren interval $I = \langle \pi^{\downarrow}(f), \pi^{\uparrow}(f) \rangle$. □

U teoremu smo zapravo sa I označili skup ne-arbitražnih cijena za slučajni zahtjev f i teorem nam kaže ako je slučajni zahtjev dostižan tada se taj skup sastoji od jednog elementa i to je upravo jedinstvena ne-arbitražna cijena za slučajni zahtjev f koja je jednaka $a = \mathbf{E_Q}[f]$, a ako slučajni zahtjev f nije dostižan tada je skup ne-arbitražnih cijena otvoren interval.

Za računanje cijene slučajnog zahtjeva moramo znati samo ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbf{Q}$. Vjerojatnost $\mathbf{P}$, koja može biti objektivna to jest statistički ustanovljena ili bilo koja subjektivna vjerojatnost, potpuno je irelevantna za računanje cijena slučajnih zahtjeva. Dakle, cijena slučajnog zahtjeva jednaka je vrijednosti portfelja koji replicira taj slučajni zahtjev.

Argumenti u dokazu prethodnog teorema mogu se preoblikovati kako bi se dobio dualni teorem koji slijedi. Oni koji su upoznati sa teorijom dualnosti, točnije, sa dualnim problemom linearnog programiranja će lako prepoznati odnos primarnog i dualnog problema u sljedećem teoremu.

Teorem 1.4.2. ***(Super-replikacija)*** *Pretpostavimo da $\tilde{S}$ zadovoljava (NA) uvjet. Tada, za $f \in L^{\infty}$ vrijedi:*

$$\begin{aligned} \pi^{\uparrow}(f) &= sup\{\boldsymbol{E_Q}[f] | \boldsymbol{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})\} \\ &= \max\{\boldsymbol{E_Q}[f] | \boldsymbol{Q} \in \mathcal{M}^a(\tilde{S})\} \\ &= \min\{a | postoji\ k \in K,\ a + k \geq f\}. \end{aligned}$$

Dokaz. U prethodnom dokazu smo pokazali da vrijedi $f - \pi^{\uparrow}(f) \in C$, pa slijedi:

$$\begin{aligned} f &= \pi^{\uparrow}(f) + g, \text{ za neki } g \in C \\ &= \pi^{\uparrow}(f) + k - h, \text{ za neki } k \in K \text{ i } h \in L^{\infty}_{+} \\ &\leq \pi^{\uparrow}(f) + k, \text{ za neki } k \in K. \end{aligned}$$

Ovim smo pokazali da vrijedi $\pi^{\uparrow}(f) \geq \inf\{a|$ postoji $k \in K, a + k \geq f\}$. Sada pretpostavimo da je $a < \pi^{\uparrow}(f)$. Pokazat ćemo da ne postoji $k \in K$ za koji vrijedi $a+k \geq f$ iz čega će slijediti da je $\pi^{\uparrow}(f) = \inf\{a|$ postoji $k \in K, a + k \geq f\}$. Štoviše, to znači da je infimum zapravo jednak minimumu. Kako je $a < \pi^{\uparrow}(f) = sup\{\mathbf{E_Q}[f]|\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})\}$, postoji $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})$ tako da vrijedi $\mathbf{E_Q}[f] > a$. Ali iz ovoga slijedi da za sve $k \in K$ (tada je $\mathbf{E_Q}[k] = 0$) vrijedi $\mathbf{E_Q}[a + k] = a < \mathbf{E_Q}[f]$ što je u kontradikciji sa $a + k \geq f$. Dakle, vrijedi $\pi^{\uparrow}(f) = \min\{a|postoji\ k \in K,\ a + k \geq f\}$.

□

Ekonomsko objašnjenje teorema je: da bi super-replicirali slučajni zahtjev f, to jest pronašli $a \in \mathbb{R}$ i strategiju $H \in \mathcal{H}$ tako da vrijedi $a + (H \cdot S)_T \geq f$, treba nam barem početno ulaganje a u iznosu $\pi^{\uparrow}(f)$.

Sada ćemo dati uvjetnu verziju spomenutog dualnog teorema koja nam omogućuje da koristimo početna investiranja koja nisu konstantna i mogućnost korištenja informacija koje su dostupna u trenutku $t = 0$, to jest sadržane u σ-argebri $\mathcal{F}_0$. Od velike je važnosti kada σ-algebra $\mathcal{F}_0$ nije trivijalna.

Teorem 1.4.3. *Pretpostavimo da $\tilde{S}$ zadovoljava (NA) uvjet. Označimo s $\mathcal{M}^e(\tilde{S}, \mathcal{F}_0)$ familiju ekvivalentnih martingalnih mjera $\boldsymbol{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})$ za koje vrijedi $\boldsymbol{Q}|_{\mathcal{F}_0} = \boldsymbol{P}$. Tada, za $f \in L^{\infty}$ vrijedi:*

$$sup\{\boldsymbol{E_Q}[f|\mathcal{F}_0]|\boldsymbol{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S}, \mathcal{F}_0)\} = \min\{h|h\ je\ \mathcal{F}_0 - izmjeriva\ i\ postoji\ g \in K\ t.d\ h + g \geq f\}.$$

Prije samog dokaza teorema napomenimo da su operacije sup i min uzete u prostoru $L^0(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbf{P})$ $\mathcal{F}_0$-izmjerivih funkcija. Navedeni skupovi u teoremu su dobro definirani. Zaista, ako su dana $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_1}[f|\mathcal{F}_0]$ i $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_2}[f|\mathcal{F}_0]$, gdje su $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \in \mathcal{M}^e(\tilde{S}, \mathcal{F}_0)$, tada postoji $\mathbf{Q}_3 \in \mathcal{M}^e(\tilde{S}, \mathcal{F}_0)$ tako da vrijedi $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_3}[f|\mathcal{F}_0] = \max\{\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_1}[f|\mathcal{F}_0], \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_2}[f|\mathcal{F}_0]\}$. Konstrukcija je vrlo jednostavna. Neka je $A = \{\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_1}[f|\mathcal{F}_0] > \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_2}[f|\mathcal{F}_0]\} \in \mathcal{F}_0$ i $\mathbf{Q}_3[B] = \mathbf{Q}_1[A \bigcap B] + \mathbf{Q}_2[A^c \bigcap B]$. Zbog $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \in \mathcal{M}^e(\tilde{S}, \mathcal{F}_0)$, to jest $\mathbf{Q}_1|_{\mathcal{F}_0} = \mathbf{Q}_2|_{\mathcal{F}_0} = \mathbf{P}$ slijedi da je tako definirana $\mathbf{Q}_3$ vjerojatnosna mjera i $\mathbf{Q}_3 \in \mathcal{M}^e(\tilde{S}, \mathcal{F}_0)$. Također zadovoljava i $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_3}[f|\mathcal{F}_0] = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_1}[f|\mathcal{F}_0] \vee \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_2}[f|\mathcal{F}_0]$.
Slično, skup na desnoj strani u teoremu je stabilan za min operaciju. Neka su funkcije h_1 i h_2 $\mathcal{F}_0$-izmjerive i $g_1, g_2 \in K$ tako da vrijedi $h_1 + g_1 \geq f$ i $h_2 + g_2 \geq f$. Za $\mathcal{F}_0$-izmjerivi skup $A = \{h_1 < h_2\}$, definiramo $h = h_1\mathbf{1}_A + h_2\mathbf{1}_{A^c}$ i $g_1\mathbf{1}_A + g_2\mathbf{1}_{A^c} = g$. Tako definirana funkcija h je očito $\mathcal{F}_0$-izmjeriva te je $g \in K$ (zbog $A \in \mathcal{F}_0$). Sada je očito da vrijedi $h + g \geq f$.

Sada ćemo dokazati teorem 1.4.3:

Dokaz. Ako je $f \leq h + g$, gdje je h $\mathcal{F}_0$-izmjeriva i $g \in K$, tada za $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S}, \mathcal{F}_0)$ vrijedi $\mathbf{E_Q}[f|\mathcal{F}_0] \leq h + 0 = h$ (jer je $g \in K$ pa vrijedi $\mathbf{E_Q}[g|\mathcal{F}_0] = 0$) iz čega slijedi:

$$\begin{aligned} a_1 &:= \sup\{\mathbf{E_Q}[f|\mathcal{F}_0]|\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S}, \mathcal{F}_0)\} \\ &\leq \inf\{h|h \ je\ \mathcal{F}_0 - izmjeriva,\ h + g \geq f,\ za\ neki\ g \in K\} =: a_2. \end{aligned}$$

Da bismo dokazali obrnutu nejednakost, pokazujemo da postoji $g \in K$ takav da vrijedi $a_1 + g \geq f$. Ako to ne vrijedi tada je $(a_1 + K) \bigcap (f + L^\infty_+) = \emptyset$ te onda možemo pronaći, primjenom teorema separacije hiperravinom, linearni funkcional ρ i $\varepsilon > 0$ tako da za svaki $g \in K$ i za svaki $l \geq 0$ vrijedi $\varepsilon + \rho(a_1 + g) < \rho(f + l)$. Ovo implicira da je $\rho \geq 0$ i $\rho(g) = 0$ za sve $g \in K$. Možemo normirati ρ pa to postaje vjerojatnosna mjera $\mathbf{Q}$. Stoga, dobili smo $\mathbf{E_Q}[a_1] + \varepsilon' < \mathbf{E_Q}[f]$ i $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^a(\tilde{S})$, gdje je $\varepsilon' > 0$. Kako je $\mathcal{M}^e(\tilde{S})$ gust skup u $\mathcal{M}^a(\tilde{S})$ možemo malo preoblikovati $\mathbf{Q}$ tako da postane element skupa $\mathcal{M}^e(\tilde{S})$. I dalje vrijedi $\mathbf{E_Q}[a_1] + \varepsilon < \mathbf{E_Q}[f]$, ali sada za mjeru $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})$. Definiramo sada $Z_t = \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}|_{\mathcal{F}_0}$ i $L_t = \frac{Z_t}{Z_0}$. Proces $(L_t)_{t=0}^\infty$ definira mjeru $\mathbf{Q}^0 \in \mathcal{M}^e(\tilde{S}, \mathcal{F}_0)$ na način $\frac{d\mathbf{Q}^0}{d\mathbf{P}} = L_T$. Štoviše, vrijedi:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}^0}[f|\mathcal{F}_0] = \mathbf{E_P}[fL_T|\mathcal{F}_0] = \frac{\mathbf{E_P}[fZ_T|\mathcal{F}_0]}{Z_0} = \mathbf{E_Q}[f|\mathcal{F}_0].$$

Prema tome je $\mathbf{E_Q}[f|\mathcal{F}_0] \leq a_1$ iz čega slijedi $\mathbf{E_Q}[f] \leq \mathbf{E_Q}[a_1]$ što je kontradikcija sa izborom $\mathbf{Q}$.
Dakle, postoji $g \in K$ takav da vrijedi $a_1 + g \geq f$ pa smo dokazali i obrnutu nejednakost. Slijedi jednakost iz teorema koju smo htjeli dokazati. □

Korolar 1.4.4. *Uz pretpostavke teorema 1.4.3 slijedi:*

$$\{\boldsymbol{E_Q}[f|\mathcal{F}_0]|\boldsymbol{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})\} = \{\boldsymbol{E_Q}[f|\mathcal{F}_0]|\boldsymbol{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S}, \mathcal{F}_0)\}.$$

Prema tome, za $f \in L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, vrijedi

$$\sup_{\boldsymbol{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})} \boldsymbol{E_Q}[f] = ||a_1||_\infty$$

gdje je $a_1 = \sup\{\boldsymbol{E_Q}[f|\mathcal{F}_0]|\boldsymbol{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S}, \mathcal{F}_0)\}$.

Dokaz. U dokazu teorema 1.3.3 i propozicije 1.3.2 pokazali smo da se svaka ekvivalentna martingalna mjera $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})$ može prikazati kao $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = f_0 \frac{d\mathbf{Q}^0}{d\mathbf{P}}$, gdje je $\mathbf{Q}^0|_{\mathcal{F}_0} = \mathbf{P}|_{\mathcal{F}_0}$, $\mathbf{Q}^0 \in \mathcal{M}^e(\tilde{S}, \mathcal{F}_0)$ i f_0 je strogo pozitivna $\mathcal{F}_0$-izmjeriva te vrijedi $\mathbf{E_P}[f_0] = 1$. Inače je f_0 proizvoljna arbitraža. Sada, za $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})$ imamo $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = f_0 \frac{d\mathbf{Q}^0}{d\mathbf{P}}$ i stoga je

$$\mathbf{E_Q}[f] = \mathbf{E_Q}[\mathbf{E}_{\mathbf{Q}^0}[f|\mathcal{F}_0]] \leq \mathbf{E_Q}[a_1] = \mathbf{E_P}[a_1 f_0],$$

iz čega slijedi nejednakost $\sup_{\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})} \mathbf{E_Q}[f] \leq ||a_1||_\infty$.
Da bismo dokazali obrnutu nejednakost, pa tako i tvrdnju teorema, potrebne su nam još

neke dodatne aproksimacije. Prvo, za dani $\varepsilon > 0$, biramo slučajnu varijablu f_0 za koju vrijedi da je $\mathcal{F}_0$-izmjeriva, $f_0 > 0$, $\mathbf{E}_\mathbf{P}[f_0] = 1$ tako da vrijedi $\mathbf{E}_\mathbf{P}[f_0 a_1] \geq ||a_1||_\infty - \varepsilon$. Za tako definiran f_0 možemo pronaći $\mathbf{Q}^1 \in \mathcal{M}^e(\tilde{S}, \mathcal{F}_0)$ tako da vrijedi $\mathbf{E}[f_0(a_1 - \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^1}[f|\mathcal{F}_0])] \leq \varepsilon$. To je moguće jer je familija $\{\mathbf{E}_\mathbf{Q}[f|\mathcal{F}_0] | \mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(S, \mathcal{F}_0)\}$ rešetka i jer se sve te funkcije nalaze u L^∞-kugli sa radijusom $||f||_\infty$. Sada uzmimo mjeru $\mathbf{Q}^0$ definiranu sa $\frac{d\mathbf{Q}^0}{d\mathbf{P}} = f_0 \frac{d\mathbf{Q}^1}{d\mathbf{P}}$. Očito je $\mathbf{Q}^0 \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})$ i vrijedi:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\mathbf{Q}^0}[f] &= \mathbf{E}_\mathbf{P}[f_0 \frac{d\mathbf{Q}^1}{d\mathbf{P}} f] \\
&= \mathbf{E}_\mathbf{P}[f_0 \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^1}[f|\mathcal{F}_0]] \ \textit{jer je } \mathbf{Q}^1|_{\mathcal{F}_0} = \mathbf{P} \\
&\geq \mathbf{E}_\mathbf{P}[f_0 a_1] - \varepsilon \ \textit{po izboru } \mathbf{Q}^1 \\
&\geq ||a_1||_\infty - 2\varepsilon \ \textit{po izboru } f_0.
\end{aligned}$$

Slijedi $\sup_{\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})} \mathbf{E}_\mathbf{Q}[f] \geq ||a_1||_\infty$.
Time smo dokazali traženu jednakost $\sup_{\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})} \mathbf{E}_\mathbf{Q}[f] = ||a_1||_\infty$.

□

1.5 Izbor numéraira

Numéraire je financijska imovina s kojom možemo, ali i ne moramo trgovati, a preko njega su izražene cijene svih ostalih imovina kojima se trguje. Dosadašnju analizu smo radili na diskontiranom modelu gdje smo izabrali jednu financijsku imovinu za trgovanje kao *numéraire*. Glavno pitanje je: kako se mijenjaju stvari kada prijeđemo na novi *numéraire*, to jest kada uzmemo neku drugu, novu jedinicu kojom izražavamo vrijednost imovine? Naravno, ne-arbitražna cijena bi trebala ostati ista jer arbitraža kao pojam ne bi trebala ovisiti da li trgujemo npr. u Eurima ili u dolarima. S druge strane, pokazat ćemo da mjera **Q** neutralna na rizik ovisi o izboru *numéraira* te kako promjena mjere neutralne na rizik odgovara na promjenu *numéraira*.

Analizirajmo situaciju u odgovarajućem stupnju općenitosti: model financijskog tržišta $S = (S_t^0, S_t^1, ..., S_t^d)_{t=0}^T$ je definiran kao u (1.1.1). Podsjetimo se, za *numéraire* smo uzeli 0-tu financijsku imovinu S_0, to jest prešli smo od j-te financijske imovine u trenutku t, S_t^j, do njezine diskontirane vrijednosti $\tilde{S}_t^j = \frac{S_t^j}{S_t^0}$, izraženoj u jedinicama S_t^0. To nas je dovelo do uvođenja diskontiranog slučajnog procesa:

$$\tilde{S} = (\tilde{S}^1, \tilde{S}^2, \ldots, \tilde{S}^d) = \Big(\frac{S^1}{S^0}, \frac{S^2}{S^0}, \ldots, \frac{S^d}{S^0}\Big).$$

Prije iskazivanja glavnih teorema, prvo ćemo vidjeti koja sve imovina može biti uzeta kao *numéraire*. Glavni uvjet za *numéraire* je da mora biti financijska imovina s kojom se može

trgovati. Naravno, možemo uzeti bilo koju imovinu $1, \ldots, d$, ali želimo biti općenitiji te uvesti tkz. "košare" novih *numéraira*.
Stoga, $(\tilde{V}_t)_{t=0}^T$, gdje je $\tilde{V}_t$ diskontirana vrijednost portfelja u trenutku t, uzimamo za novi *numéraire*. Naravno, moramo pretpostaviti da je ta vrijednost strogo pozitivna u svakom trenutku, $\tilde{V}_t > 0$ za svaki t. Nadalje, pretpostavit ćemo da je $\tilde{V}_0 = 1$, isto kako smo pretpostavili za S^0. Dakle počinjemo sa vrijednosnim procesom $\tilde{V} = 1 + (H^0 \cdot \tilde{S})$ koji zadovoljava $\tilde{V}_t > 0$ za svaki t, gdje je H^0 fiksni element od $\mathcal{H}$. Primijetimo da su procesi $\tilde{V}$ i $\tilde{S}$ izraženi u jedinicama imovine S^0, to jest našeg početnog izabranog *numéraira*.

I dalje promatramo financijsko tržiše bez arbitraže pa prema propiziciji 1.2.16 vrijedi da prošireno tržište

$$\tilde{S}^{ext} = (\tilde{S}^1, \tilde{S}^2, \ldots, \tilde{S}^d, 1, \tilde{V}) \tag{1.14}$$

također ne dopušta arbitražu te vrijedi $\mathcal{M}^e(\tilde{S}) = \mathcal{M}^e(\tilde{S}^{ext})$. U stvarnim vrijednostima, $\tilde{S}^{ext}$ je opisan kao slučajni proces:

$$S^{ext} = (\tilde{S}^1 S^0, \tilde{S}^2 S^0, \ldots, \tilde{S}^d S^0, S^0, \tilde{V} S^0).$$

Ako sada uzmemo zadnju komponentu u procesu S^{ext} za *numéraire*, dobit ćemo slučajni proces

$$X = \Big(\frac{\tilde{S}^1}{\tilde{V}}, \ldots, \frac{\tilde{S}^d}{\tilde{V}}, \frac{1}{\tilde{V}}, 1\Big). \tag{1.15}$$

Kako bih zadržali simetričan zapis izostavit ćemo zadnju komponentu koja je jednaka 1 te koristiti $d + 1$-dimenzionalne procese kao strategije trgovanja. Također, u (1.14) ćemo izostaviti 1 u $\tilde{S}^{ext}$. Ovo nam omogućuje da lakše prijeđemo sa procesa $\tilde{S}^{ext}$ na proces X.

Sljedeća lema pokazuje, ekonomski poprilično očitu činjenicu, da kada prelazimo sa $\tilde{S}$ na $\tilde{S}^{ext}$, prostor K slučajnih zahtjeva dostižni po cijeni 0 se ne mijenja.

Lema 1.5.1. *Koristeći gore navedene zapise vrijedi:*

$$\begin{aligned} K(\tilde{S}^{ext}) =& \{(H \cdot \tilde{S}^{ext})_T |\ gdje\ je\ H\ (d+1) - dimenzionalni\ predvidivi\ proces\} \\ =& K(\tilde{S}) = \{(H' \cdot \tilde{S})_T |\ gdje\ je\ H'\ d - dimenzionalni\ predvidivi\ proces\}. \end{aligned}$$

Dokaz. Slučajni proces $\tilde{S}^{ext}$ smo dobili tako da smo proces $\tilde{S}$ proširili sa $\tilde{V}$ koji je jednak $\tilde{V} = 1 + (H^0 \cdot \tilde{S})$. Primijetimo da je $\tilde{V}$ dan kao stohastički integral procesa $\tilde{S}$ pa očekujemo da se prostor K neće promijeniti jer smo model proširili sa $\tilde{V}$.
Dovoljno je za neki 1-dimenzionalni predvidivi proces L pokazati da se količine $L_t \Delta \tilde{V}_t$ nalaze u $K(\tilde{S})$. To nije teško, vrijedi:

$$L_t \Delta \tilde{V}_t = L_t (H_t^0, \Delta \tilde{S}_t) = (L_t H_t^0, \Delta \tilde{S}_t).$$

Iz definiciji prostora $K(\tilde{S})$, slijedi $(L_t H^0, \Delta\tilde{S}_t) \in K(\tilde{S})$. Ovim smo dokazali jednakost $K(\tilde{S}^{ext}) = K(\tilde{S})$. □

Lema 1.5.2. *Fiksiramo $0 \leq t \leq T$ i neka je slučajni zahtjev $f \in K(\tilde{S}) = K(\tilde{S}^{ext})$ $\mathcal{F}_t$ − izmjeriv. Tada se proizvoljna slučajna varijabla $\frac{f}{\tilde{V}_t}$ može prikazati u obliku $\frac{f'}{\tilde{V}_T}$, pri čemu je $f' \in K(\tilde{S})$.*

Dokaz. Vrijedi:

$$\frac{f}{\tilde{V}_t} - \frac{f}{\tilde{V}_T} = \frac{1}{\tilde{V}_T}\left(\frac{f\tilde{V}_T}{\tilde{V}_t} - f\right) = \frac{1}{\tilde{V}_T}\left(\frac{f\tilde{V}_T - f\tilde{V}_t}{\tilde{V}_t}\right) = \frac{1}{\tilde{V}_T}\left(f\frac{\tilde{V}_T - \tilde{V}_t}{\tilde{V}_t}\right) = \frac{1}{\tilde{V}_T}\sum_{s=t+1}^{T}\frac{f}{\tilde{V}_t}(\tilde{V}_s - \tilde{V}_{s-1})$$

Jer je $\frac{f}{\tilde{V}_t}$ $\mathcal{F}_t$-izmjeriva i sumiranje počinje od $s > t$ slijedi da slučajna varijabla $f'' = \sum_{s=t+1}^{T}\frac{f}{\tilde{V}_t}(\tilde{V}_s - \tilde{V}_{s-1})$ pripada prostoru $K(\tilde{S}^{ext})$. Imamo: $\frac{f}{\tilde{V}_t} - \frac{f}{\tilde{V}_T} = \frac{1}{\tilde{V}_T}f''$ iz čega slijedi $\frac{f}{\tilde{V}_t} = \frac{f''}{\tilde{V}_T} + \frac{f}{\tilde{V}_T} = \frac{f''+f}{\tilde{V}_T}$. Dakle, ako za f' uzmemo $f' = f'' + f$ slijedi tvrdnja. □

Propozicija 1.5.3. *Neka je X definiran kao u (1.15), tada vrijedi:*

$$K(X) = \left\{\frac{f}{\tilde{V}_T}\middle| f \in K(\tilde{S})\right\}.$$

Dokaz. Imamo da je $g \in K(X) = \{(H\cdot X)_T | H \text{ je } (d+1)-\text{dimenzionalni predvidivi proces}\}$ ako i samo ako postoji $(d+1)$-dimenzionalni predvidivi proces H tako da vrijedi $g = \sum_{t=1}^{T}(H_t, \Delta X_t) = \sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{d+1} H_t^j \Delta X_t^j$. Za, $j = 1, \ldots, d$ i $t = 1, \ldots, T$, vrijedi:

$$\begin{aligned}
\Delta X_t^j &= (X_t^j - X_{t-1}^j)\\
&= \Big(\frac{\tilde{S}_t^j}{\tilde{V}_t} - \frac{\tilde{S}_{t-1}^j}{\tilde{V}_{t-1}}\Big)\\
&= \frac{\Delta\tilde{S}_t^j}{\tilde{V}_t} + \tilde{S}_{t-1}^j\Big(\frac{1}{\tilde{V}_t} - \frac{1}{\tilde{V}_{t-1}}\Big)\\
&= \frac{\Delta\tilde{S}_t^j}{\tilde{V}_t} - \frac{\tilde{S}_{t-1}^j}{\tilde{V}_{t-1}}\frac{\Delta\tilde{V}_t}{\tilde{V}_t}\\
&= \frac{1}{\tilde{V}_t}(\Delta\tilde{S}_t^j - X_{t-1}^j\Delta\tilde{V}_t).
\end{aligned}$$

Slijedi

$$H_t^j\Delta X_t^j = \frac{1}{\tilde{V}_t}\Big((H_t^j\Delta\tilde{S}_t^j - (H_t^j X_{t-1}^j)\Delta\tilde{V}_t)\Big),$$

što je u formi $\frac{f}{\tilde{V}_t}$ za neki $f \in K(\tilde{S}^{ext}) = K(\tilde{S})$. Za $j = d+1$ i $t = 1, \ldots, T$ primijenjuje se isti argument kao gore zamjenom $\tilde{S}_t^j$ i $\tilde{S}_{t-1}^j$ sa 1.

Prema lemi 1.5.2 vrijedi $\frac{f}{\tilde{V}_t} = \frac{f'}{\tilde{V}_T}$, za neki $f' \in K(\tilde{S})$. To pokazuje inkluziju $K(X) \subset \frac{1}{\tilde{V}_T} K(\tilde{S})$. Obrnuta inkluzija će vrijediti zbog simetrije. Naime, na financijskom tržištu, ali sada sa modelom X možemo izabrati $W_t = \frac{1}{\tilde{V}_t}$ za *numéraire*. Sada prijelaz sa X na model $\tilde{S}^{ext}$ je napravljen uz korištenje W kao novog *numéraire*. Inkluziju koju smo upravo dokazali poviše daje:

$$K(\tilde{S}) \subset \frac{1}{W_T} K(X) = \tilde{V}_T K(X).$$

Time smo dokazali da vrijedi jednakost $K(\tilde{S}) = \tilde{V}_T K(X)$ što se i tražilo.

□

Teorem 1.5.4. *(Promjena numéraira) Neka model $\tilde{S}$ na financijskom tržištu zadovoljava (NA) uvjet, neka je dan slučajni proces $\tilde{V} = 1 + H^0 \tilde{S}$ takav da vrijedi $\tilde{V}_t > 0$ za svaki $t = 0, 1, \ldots, T$ te neka je dan slučajni proces $X = \left(\frac{\tilde{S}^1}{\tilde{V}}, \ldots, \frac{\tilde{S}^d}{\tilde{V}}, \frac{1}{\tilde{V}}, 1\right)$. Tada model X također zadovoljava (NA) uvjet i mjera $\boldsymbol{Q}$ se nalazi u familiji svih ekvivalentnih martingalnih mjera za proces $\tilde{S}$ ako i samo ako mjera $\boldsymbol{Q}'$ definirana kao $d\boldsymbol{Q}' = \tilde{V}_T d\boldsymbol{Q}$ pripada familiji svih ekvivalentnih martingalnih mjera s obzirom na X; $\mathcal{M}^e(X)$.*

Dokaz. Model $\tilde{S}$ na financijskom tržištu zadovoljava (NA) uvjet pa vrijedi
$K(\tilde{S}) \bigcap L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = \emptyset$. U propoziciji 1.5.3 smo dokazali da vrijedi
$K(X) = \frac{1}{\tilde{V}_T} K(\tilde{S})$ iz čega slijedi $K(X) \bigcap L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = \emptyset$. Time smo dokazali da i X zadovoljava (NA) uvjet.
Nadalje, prema propoziciji 1.2.12, ekvivalentna vjerojatnosna mjera $\mathbf{Q}$ pripada skupu $\mathcal{M}^e(\tilde{S})$ ako i samo ako za sve $f \in K(\tilde{S})$ vrijedi $\mathbf{E_Q}[f] = 0$. Ali to je isto kao:

$$\mathbf{E_Q}[\tilde{V}_T \frac{f}{\tilde{V}_T}] = 0, \ \textit{za sve } f \in K(\tilde{S}),$$

što je ekvivalentno s $\mathbf{E_Q}[\tilde{V}_T g] = 0$, za sve $g \in K(X)$. Sada, za vjerojatnosnu mjeru $\mathbf{Q}'$ uzmemo $d\mathbf{Q}' = \tilde{V}_T d\mathbf{Q}$ te računamo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E_Q}[\tilde{V}_T g] &= \sum_\omega \tilde{V}_T(\omega) g(\omega) \mathbf{Q}(\omega) \\
&= \sum_\omega \tilde{V}_T(\omega) g(\omega) \frac{\mathbf{Q}'(\omega)}{\tilde{V}_T} \\
&= \sum_\omega g(\omega) \mathbf{Q}'(\omega) \\
&= \mathbf{E}_{\mathbf{Q}'}[g].
\end{aligned}$$

Dakle, $\mathbf{E_Q}[\tilde{V}_T g] = 0$, za sve $g \in K(X)$ ako i samo ako $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}'}[g] = 0$, za sve $g \in K(X)$, a to vrijedi ako i samo ako je vjerojatnosna mjera $\mathbf{Q}'$ definirana kao $d\mathbf{Q}' = \tilde{V}_T d\mathbf{Q}$ iz skupa $\mathcal{M}^e(X)$.

□

1.6 Kramkovljev teorem o opcionalnoj dekompoziciji

Slijedi teorem kojeg je u mnogo općenitijim uvjetima dokazao D.Kramkov te je teorem složenija verzija teorema 1.4.2.

Da bismo objasnili terminologiju "opcionalna dekompozicija", usporedit ćemo teorem sa poznatom Doobovom dekompozicijom za nenegativne supermartingale $V = (V_t)_{t=0}^T$: neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ vjerojatnosni prostore te neka je slučajni proces $V = (V_t)_{t=0}^T$ nenegativan i adaptiran u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$. Tada su sljedeće dvije tvrdnje ekvivalentne:

(i) V je supermartingal (preciznije $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$-supermartingal)

(ii) proces V se može na jedinstveni način zapisati u obliku $V = V_0 + M - C$, gdje je M lokalni martingal (s obziron na $\mathbf{P}$) i C je rastući predvidivi proces što znači da vrijedi $C_0 \leq C_1 \leq \cdots \leq C_T$ $g.s$, C_t je $\mathcal{F}_{t-1}$-izmjeriv za sve $1 \leq t \leq T$ te vrijedi $M_0 = C_0 = 0$.

Teorem 1.6.1. *(Opcionalna dekompozicija) Pretpostavimo da model $\tilde{S}$ zadovoljava (NA) uvjet te neka je $V = (V_t)_{t=0}^T$ adaptirani slučajni proces. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) V je supermartingal za sve $\boldsymbol{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})$

(ii) V je supermartingal za sve $\boldsymbol{Q} \in \mathcal{M}^a(\tilde{S})$

(iii) proces V se može zapisati u obliku $V = V_0 + H \cdot \tilde{S} - C$, gdje je $H \in \mathcal{H}$ i $C = (C_t)_{t=0}^T$ je rastući adaptirani proces s $C_0 = 0$.

Prije dokaza teorema usporedimo ova dva navedena teorema. Postoje sličnosti, ali i značajne razlike između njih. Ako usporedimo uvjet (i), u okruženju teorema opcionalne dekompozicije supermartingalno svojstvo se odnosi na sve martingalne mjere $\mathbf{Q}$ za proces $\tilde{S}$ dok se u Doobovoj dekompoziciji odnosi na opću mjeru $\mathbf{P}$. Prema uvjetu (ii), uloga lokalnog martingala M u Doobovoj dekompoziciji je dana sa stohastičkim integralom $H \cdot \tilde{S}$. Glavna razlika je ta da u teoremu 1.6.1 dekompozicija supermartingala nije više jedinstvena kao što je u Doobovoj dekompoziciji i ne može se pronaći, u cijelosti, proces C takav da bude predvidiv. Proces C se može pronaći samo tako da bude opcionalan što je u našem dosadašnjem okruženju isto što i adaptirani proces.

Ekonomska interpretacija teorema 1.6.1: proces V u obliku $V = V_0 + H \cdot S - C$ opisuje bogatstvo/vrijednost koju ostvaruje investitor. Početna vrijednost je V_0, zatim investiranjem na financijskom tržištu uz strategiju trgovanja H i konzumiranjem/trošeći kao što je opisano procesom C, gdje slučajna varijabla C_t opisuje ukupnu potrošnju tijekom perioda $\{1, \ldots, t\}$, investitor ostvaruje vrijednost V_t u trenutku t. Poruka teorema je ta da su takvi vrijednosni procesi opisani uvjetom (i), ili, ekvivalentno uvjetom (ii)

Sada, dokažimo teorem 1.6.1.

Dokaz. Prvo pogledajmo slučaj kada je $T = 1$, to jest $\tilde{S} = (\tilde{S}_0, \tilde{S}_1)$ jednoperiodni model. U tom slučaju, ovaj teorem je samo reformulacija teorema 1.4.2: ako je V supermartingal za sve $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S})$, tada vrijedi (po definiciji supermartingala)

$$\mathbf{E_Q}[V_1 - V_0] \leq 0, \quad \textit{za sve } \mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(\tilde{S}).$$

Iz toga slijedi da postoji predvidiva strategija trgovanja H, to jest $\mathcal{F}_0$-izmjeriva funkcija s vrijednostima u $\mathbb{R}^d$ (u slučaju kada je $T = 1$) takva da vrijedi $(H \cdot \tilde{S})_1 \geq V_1 - V_0$. Ako definiramo $C_0 = 0$ i $\Delta C_1 = C_1 - C_0 = C_1 = -V_1 + (V_0 + (H \cdot \tilde{S})_1)$ dobit ćemo željeni rastav supermartingala. Vrijedi $V_1 = V_0 + (H \cdot \tilde{S})_1 - C_1$ i time smo završili konstrukciju u slučaju kada je $T = 1$.
Općenito za $T > 1$ možemo primijeniti, za svaki fiksirani $t \in \{1, \dots, T\}$, isti postupak kao i gore za financijsko tržište s jednim periodom (S_{t-1}, S_t) definiranim na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ i adaptiranim s obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_{t-1}, \mathcal{F}_t)$. U tom slučaju, postoji $\mathcal{F}_{t-1}$-izmjeriva funkcija s vrijednostima u $\mathbb{R}^d$ i nenegativna $\mathcal{F}_t$-izmjeriva funkcija ΔC_t tako da vrijedi:

$$\Delta V_t = (H_t, \Delta S_t) - \Delta C_t.$$

Traženi zapis procesa V ćemo dobiti tako da definiramo predvidivi proces H sa dobivenim slučajnim varijablama $(H_t)_{t=1}^T$ i rastući, adaptirani proces C sa $C_t = \sum_{u=1}^t \Delta C_u$. Dobili smo da za svaki t vrijedi $V_t = V_0 + (H \cdot \tilde{S})_t - C_t,\ C_0 = 0$ te smo time dokazali implikaciju $(i) \Rightarrow (iii)$.

Dokaz $(iii) \Rightarrow (i)$. Želimo dokazati da je V supermartingal, to jest da vrijedi: za sve $t = 0, \dots, T$

$$\mathbf{E_Q}[V_t | \mathcal{F}_{t-1}] = V_t.$$

Računamo:
$\mathbf{E_Q}[V_t|\mathcal{F}_{t-1}] = \mathbf{E_Q}[V_0 + (H \cdot \tilde{S})_t - C_t|\mathcal{F}_{t-1}] = V_0 + \mathbf{E_Q}[(H \cdot \tilde{S})_t - C_t|\mathcal{F}_{t-1}] \leq V_0 + (H \cdot \tilde{S})_{t-1} - C_{t-1} = V_{t-1}$, jer je proces $(H \cdot \tilde{S})$ $\mathbf{Q}$-martingal, a nejednakost slijedi jer je C rastući adaptirani proces. □

Poglavlje 2

Maksimizacija korisnosti na konačnim vjerojatnosnim prostorima

Do sada smo opisali modele $\tilde{S}$ na financijskom tržištu. U ovom poglavlju ćemo, uz model $\tilde{S}$ na financijskom tržištu, promatrati funkciju $U(x)$ koja opisuje korisnost agentovog bogatstva x u krajnjem vremenskom trenutku T.

Za početak uvodimo neke osnovne pretpostavke za funkciju $U(x)$: $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ je rastuća na skupu realnih brojeva, neprekidna na $\{U > -\infty\}$, diferencijabila i strogo konkavna u unutrašnjosti $\{U > -\infty\}$. Pretpostavljamo još da granična/marginalna korisnost teži u nulu kada bogatstvo teži u beskonačno to jest:

$$U'(\infty) := \lim_{x \longrightarrow \infty} U'(x) = 0.$$

Ponašanje (granične/marginalne) korisnosti promatrat ćemo u dva slučaja, ovisno o vrijedosti bogatstva.

1.SLUČAJ (Negativne vrijednosti bogatstva nisu dozvoljene): u ovom slučaju pretpostavljamo da funkcija U zadovoljava uvjete $U(x) = -\infty$, za $x < 0$, dok je $U(x) > -\infty$, za $x > 0$ i takozvani Inada uvjet

$$U'(0) := \lim_{x \searrow 0} U'(x) = \infty.$$

2.SLUČAJ (Negativne vrijednosti bogatstva su dozvoljene): u ovom slučaju pretpostavljamo da je $U(x) > -\infty$, za sve $x \in \mathbb{R}$ i da vrijedi

$$U'(-\infty) := \lim_{x \searrow -\infty} U'(x) = \infty.$$

Karakteristični primjeri funkcije U za 1.slučaj su:

$$U(x) = \ln(x),\ x > 0,$$

ili

$$U(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha},\ \alpha \in (-\infty, 1)\backslash\{0\},\ x > 0,$$

dok je za 2.slučaj

$$U(x) = -e^{\gamma x},\ \gamma > 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

Primijetimo da je sa ekonomskog gledišta prirodno zahtijevati da granična korisnost teži prema nuli kada bogatstvo x teži prema beskonačnosti i da korisnost teži prema beskonačnosti kada bogatstvo x teži prema infimumu svojih dopuštenih vrijednosti. Infimum dopuštenih vrijednosti odnosno domene $\{U > -\infty\}$ od U može biti konačan ili jednak $-\infty$. U prethodnom slučaju smo bez smanjenja općenitosti pretpostavili da je taj infimum jednak nuli.

U ostatku poglavlja ćemo precizno objasniti problem maksimizacije očekivane korisnosti bogatstva u krajnjem vremenskom trenutku T.
Definiramo funkciju vrijednosti

$$u(x) := \sup_{H \in \mathcal{H}} \mathbf{E}[U(x + (H \cdot \tilde{S})_T)],\ x \in dom(U), \tag{2.1}$$

pri čemu je H iz skupa svih strategija trgovanja $\mathcal{H}$.
Funkcija vrijednosti $u(x)$ se naziva indirektna funkcija korisnosti. Ekonomski govoreći ona označava očekivanu korisnost bogatstva ekonomskog agenta u vremenskom trenutku T za dani početni ulog (početnu investiciju) x pod uvjetom da optimalno investira u financijski model $\tilde{S}$.
Problem pronalaženja, uz dani početni ulog x, optimalne strategije trgovanja $\widehat{H}(x) \in \mathcal{H}$ iz (2.1) se može promatrati kroz dva slučaja: u slučaju kada imamo potpuni model tržišta $\tilde{S}$ bez arbitraže te u mnogo općenitijem slučaju kada je model tržišta $\tilde{S}$ bez arbitraže ali nije nužno potpuni. U ovom radu ćemo objasniti samo slučaj s potpunim modelom tržišta bez arbitraže.

2.1 Potpuni model tržišta

Podsjetimo se da je model tržišta bez arbitraže potpun ako i samo ako postoji jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera. Stoga, pretpostavimo da je skup $\mathcal{M}^e(\tilde{S})$ ekvivalentnih martingalnih mjera za koje je $\tilde{S}$ martingal jednočlan skup $\{\mathbf{Q}\}$. U ovom slučaju promatramo Arrow-Debreu imovine $\mathbf{1}_{\{\omega_n\}}$ koje iznose jednu jedinicu *numéraira* u vremenskom trenutku T kada je ω_n stvarno stanje svijeta, a nula kada nije. U pogledu naše normalizacije *numéraira* $\tilde{S}_t^0 = 1$, dobivamo sljedeću vezu cijena Arrow-Debreu imovine u vremenskom trenutku $t = 0$:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[\mathbf{1}_{\{\omega_n\}}] = \mathbf{Q}[\omega_n] =: q_n.$$

Prema korolaru 1.2.15 svaka takva imovina $\mathbf{1}_{\{\omega_n\}}$ se može zapisati kao $\mathbf{1}_{\{\omega_n\}} = \mathbf{Q}[\omega_n] + (H^n \cdot \tilde{S})_T$, za neku predvidivu strategiju trgovanja $H^n \in \mathcal{H}$.

Prema tome, za fiksni početni ulog $x \in dom(U)$, problem maksimizacije korisnosti (2.1) se jednostavno može zapisati kao

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[U(X_T)] = \sum_{n=1}^{N} p_n U(\xi_n) \longrightarrow \max! \tag{2.2}$$

pod uvjetom ograničenja

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[X_T] = \sum_{n=1}^{N} q_n \xi_n \leq x. \tag{2.3}$$

Kako bismo pokazali da su (2.2) i (2.3) zaista ekvivalentni početnom problemu (2.1) primijetimo da se prema teoremu 1.4.2 slučajna varijabla $(X_T(\omega_n))_{n=1}^N = (\xi_n)_{n=1}^N$ može prikazati kao slučajna varijabla u formi $x + (H \cdot \tilde{S})_T = x + \sum_{t=1}^T H_t \Delta \tilde{S}_t$ ako i samo ako vrijedi $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[X_T] = \sum_{n=1}^N q_n \xi_n \leq x$. Relacija između ove dvije slučajne varijable ima posebno jasno tumačenje kao q_n je jednostavno cijena imovine $\mathbf{1}_{\{\omega_n\}}$.

Pišemo ξ_n za $(X_T(\omega_n))$ kako bismo naglasili da se problem (2.2) jednostavno svodi na problem konkavne maksimizacije u $\mathbb{R}^N$-u s jednim linearnim ograničenjem koji je prilično elementarni problem. Da bismo ga riješili, definiramo Lagrangeovu funkciju:

$$L(\xi_1, \ldots, \xi_N, y) = \sum_{n=1}^{N} p_n U(\xi_n) - y\Big(\sum_{n=1}^{N} q_n \xi_n - x\Big) \tag{2.4}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} p_n \Big(U(\xi_n) - y\frac{q_n}{p_n}\xi_n\Big) + yx. \tag{2.5}$$

Lagrangeov multiplikator se općenito označava sa $\lambda \geq 0$, ali u ovom slučaju smo ga označili sa slovom $y \geq 0$ kako bi naglasili dualnu vezu između veličina x i y koja će se pojaviti u nastavku.

Definiramo

$$\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_N) = \inf_{y>0} L(\xi_1, \ldots, \xi_N, y),\ \xi_n \in dom(U), \tag{2.6}$$

i

$$\Psi(y) = \sup_{\xi_1,\ldots,\xi_N} L(\xi_1, \ldots, \xi_N, y),\ y \geq 0. \tag{2.7}$$

Primijetimo da vrijedi

$$\sup_{\xi_1,\dots,\xi_N} \Phi(\xi_1,\dots,\xi_N) = \sup_{\xi_1,\dots,\xi_N,\, \sum_{n=1}^N q_n\xi_n \le x} \sum_{n=1}^N p_n U(\xi_n) = u(x). \tag{2.8}$$

Zaista, ako je $(\xi_1,\dots,\xi_N)$ u dopuštenoj okolini $\sum_{n=1}^N q_n\xi_n \le x$ tada je

$$\Phi(\xi_1,\dots,\xi_N) = L(\xi_1,\dots,\xi_N,0) = \sum_{n=1}^N p_n U(\xi_n).$$

Obratno, ako $(\xi_1,\dots,\xi_N)$ zadovoljava nejednakost $\sum_{n=1}^N q_n\xi_n > x$, tada puštanjem $y \longrightarrow \infty$ u jednakosti (2.6) dobivamo $\Phi(\xi_1,\dots,\xi_N) = -\infty$.

Sada, analizirajmo funkciju $\Psi(y)$. Koristeći Lagrangeovu formu označenu sa (2.4) i fiksni $y > 0$, optimizacijski problem u $\mathbb{R}^N$-u koji se pojavljuje u (2.7) se može rastaviti na N nezavisnih problema optimizacije u $\mathbb{R}$-u

$$U(\xi_n) - y\frac{q_n}{p_n}\xi_n \longrightarrow \max!,\ \xi_n \in \mathbb{R}.$$

Zapravo, jednodimenzionalni optimizacijski problemi koji se pojavljuju poviše su u jako prikladnom zapisu: napomenimo da za konkavnu funkciju $U(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ konjugirana funkcija V funkcije U (koja je zapravo Legendreova transformacija od $x \mapsto -U(-x)$) je definirana kao

$$V(\eta) = \sup_{\xi\in\mathbb{R}}[U(\xi) - \eta\xi],\ \eta > 0. \tag{2.9}$$

Slijedi definicija konjugirane (dualne) funkcije te propozicija koja će nam bit potrebna kako bi izračunali funkciju $\Psi(y)$.

Definicija 2.1.1. *Kažemo da funkcija $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, konjugirana (dualna) funkcija funkcije U, zadovoljava uobičajene pretpostavke regularnosti, ako funkcija V poprima konačne vrijednosti te je diferencijabilna, strogo konveksna na intervalu $[0,\infty\rangle$ i zadovoljava*

$$V'(0) := \lim_{y\searrow 0} V'(y) = -\infty. \tag{2.10}$$

Ponašanje funkcije V u beskonačnosti se promatra kroz dva slučaja:
1. *slučaj:*

$$\lim_{y\searrow\infty} V(y) = \lim_{x\searrow 0} U(x) \quad i \quad \lim_{y\searrow 0} V'(y) = 0 \tag{2.11}$$

2. *slučaj:*

$$\lim_{y\searrow\infty} V(y) = \infty \quad i \quad \lim_{y\searrow 0} V'(y) = \infty. \tag{2.12}$$

Propozicija 2.1.2. *Ako funkcija U zadovoljava pretpostavke navedene na početku ovog poglavlja, tada njezina konjugirana (dualna) funkcija V zadovoljava inverznu formulu*

$$U(\xi) = \inf_{\eta}[V(\eta) + \eta\xi], \ \xi \in dom(U) \tag{2.13}$$

te također zadovoljava pretpostavke regularnosti iz definicije 2.1.1. Nadalje, $-V'(y)$ je inverzna funkcija od $U'(x)$.
Obratno, ako funkcija V zadovoljava pretpostavke regularnosti iz definicije 2.1.1, tada i funkcija U definirana sa (2.13) zadovoljava pretpostavke regularnosti sa početka ovog poglavlja.

Pišemo $-V' = I$, gdje smo sa I označili "inverz" funkcije. Tada prema propoziciji 2.1.2 vrijedi $I = (U')^{-1}$. U' ima ekonomsku interpretaciju kao granična korisnost investitora dobivena pomoću funkcije korisnosti U.

Evo nekih konkretnih primjera za parove konjugiranih funkcija:

$U(x) = \ln(x), \ x > 0, \quad V(y) = -\ln(y) - 1,$

$U(x) = -\frac{\exp^{-\gamma x}}{\gamma}, \ x \in \mathbb{R}, \quad V(y) = \frac{y}{\gamma}(\ln(y) - 1), \ \gamma > 0,$

$U(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}, \ x > 0, \quad V(y) = \frac{1-\alpha}{\alpha} y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}, \ \alpha \in \langle -\infty, 1\rangle \backslash \{0\}.$

Sada kada smo naveli sve potrebne činjenice o Legendreovim transformacijama možemo izračunati $\Psi(y)$. Koristeći definiciju (2.9) i (2.4), jednakost (2.7) postaje:

$$\begin{aligned}
\Psi(y) &= \sup_{\xi_1,\dots,\xi_N} L(\xi_1, \dots, \xi_N, y) \\
&= \sup_{\xi_1,\dots,\xi_N} \Big(\sum_{n=1}^N p_n \Big(U(\xi_n) - y\frac{q_n}{p_n}\xi_n \Big) + yx \Big) \\
&= \sum_{n=1}^N p_n \sup_{\xi_1,\dots,\xi_N} \Big(U(\xi_n) - y\frac{q_n}{p_n}\xi_n \Big) + yx \\
&= \sum_{n=1}^N p_n V\Big(y\frac{q_n}{p_n} \Big) + yx \\
&= \mathbf{E_P}\Big[V\Big(y\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \Big) \Big] + yx.
\end{aligned}$$

Dualnu funkciju vrijednosti označavamo sa $v(y)$ i definiramo kao

$$v(y) := \mathbf{E_P}\Big[V\Big(y\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \Big) \Big] = \sum_{n=1}^N p_n V\Big(y\frac{q_n}{p_n} \Big), \ y > 0. \tag{2.14}$$

Definirana funkcija v ima ista kvalitativna svojstva kao i funkcija V iz definicije 2.1.1 jer je konveksna kombinacija od V izračunata za linearno skalirane argumente. Stoga, pomoću (2.10), (2.11) i (2.12) nalazimo, za fiksni $x \in dom(U)$, jedinstveni $\hat{y} = \hat{y}(x) > 0$ takav da $v'(\hat{y}(x)) = -x$ koji je stoga jedinstveni minumum dualnog problema

$$\Psi(y) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\Big[V\Big(y\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\Big)\Big] + yx = \min!$$

Sada, fiksiranjem kritične točke $\hat{y}(x)$, konkavna funkcija

$$(\xi_1, \ldots, \xi_N) \mapsto L(\xi_1, \ldots, \xi_N, \hat{y}(x))$$

definirana sa (2.4) poprima svoj jedinstveni maksimum u točki $(\hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_N)$ zadovoljavajući

$$U'(\hat{\xi}_n) = \hat{y}(x)\frac{q_n}{p_n} \ \textit{ili, ekvivalentno,} \ \hat{\xi}_n = I\Big(\hat{y}(x)\frac{q_n}{p_n}\Big),$$

iz čega slijedi

$$\begin{aligned}\inf_{y>0}\Psi(y) &= \inf_{y>0}(v(y) + xy) &(2.15)\\ &= v(\hat{y}(x)) + x\hat{y}(x) &(2.16)\\ &= L(\hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_N, \hat{y}(x)). &(2.17)\end{aligned}$$

Primijetimo da je $\hat{\xi}_n$, za $1 \leq n \leq N$, u unutrašnjosti domene funkcije U pa je funkcija L neprekidno diferencijabilana u točki $(\hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_N, \hat{y}(x))$ što implicira da se gradijent od L gubi u $(\hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_N, \hat{y}(x))$ i vrijedi $\frac{\partial}{\partial y}L(\xi_1, \ldots, \xi_N, y)|_{(\hat{\xi}_1,\ldots,\hat{\xi}_N,\hat{y}(x))} = 0$. Stoga, iz (2.4) i $\hat{y}(x) > 0$ zaključujemo da je ograničenje iz (2.3) nužno, odnosno vrijedi

$$\sum_{n=1}^{N} q_n\hat{\xi}_n = x, \tag{2.18}$$

i

$$\sum_{n=1}^{N} p_n U(\hat{\xi}_n) = L(\hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_N, \hat{y}(x)). \tag{2.19}$$

Nadalje, nejednakost $u(x) \geq \sum_{n=1}^{N} p_n U(\hat{\xi}_n)$ slijedi iz (2.18) i (2.8) dok obrnuta nejednakost slijedi iz (2.19) i činjenice da za sve $\xi_1, \ldots, \xi_N$ koji zadovoljavaju ograničenje (2.3) vrijedi

$$\sum_{n=1}^{N} p_n U(\xi_n) \leq L(\xi_1, \ldots, \xi_N, \hat{y}(x)) \leq L(\hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_N, \hat{y}(x)).$$

Prema tome, za funkciju vrijednosti u dobivamo

$$u(x) = \sum_{n=1}^{N} p_n U(\hat{\xi}_n). \tag{2.20}$$

Za optimalno rješenje $\hat{X}_T(x)(\omega_n) = \hat{\xi}_n,\ n = 1, \ldots, N$, pisat ćemo samo $\hat{X}_T(x) \in C(x)$.

Kombiniranjem formula (2.15), (2.19) i (2.20) primijetimo da su funkcije vrijednosti u i v konjugirane funkcije:

$$\inf_{y>0}(v(y) + xy) = v(\hat{y}(x)) + x\hat{y}(x) = u(x),\ x \in dom(U).$$

Prema tome, jednakost $v'(\hat{y}(x)) = -x$, koju smo koristili da bi definirali $\hat{y}(x)$, se translatira u

$$u'(x) = \hat{y}(x),\ za\ x \in dom(U).$$

Iz propozicije 2.1.2 i napomene nakon jednakosti (2.14) zaključujemo da funkcija u nasljeđuje sva svojstva od funkcije U koja smo naveli na početku ovog poglavlja.

Slijedi teorem koji sumira sve što smo do sada iskazali te dokazali.

Teorem 2.1.3. *Neka je model financijskog tržišta $(\tilde{S}_t)_{t=0}^T$ definiran na konačnom filtriranom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t=0}^T, \mathbf{P})$ i pretpostavimo da je $\mathcal{M}^e(\tilde{S}) = \{\mathbf{Q}\}$. Neka funkcija korisnosti U zadovoljava dosadašnje (napisane poviše) pretpostavke.*

Označimo sa $u(x)$ i $v(y)$ funkcije vrijednosti

$$u(x) = \sup_{X_T \in C(x)} \mathbf{E}[U(X_T)],\ x \in dom(U), \tag{2.21}$$

$$v(y) = \mathbf{E}\Big[V\Big(y\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\Big)\Big],\ y > 0. \tag{2.22}$$

Tada vrijedi:

(i) Funkcije vrijednosti $u(x)$ i $v(y)$ su konjugirane (dualne) funkcije i funkcija u nasljeđuje svojstva od funkcije U koja su navedena na početku ovog poglavlja.

(ii) Optimalno rješenje $\hat{X}_T(x)$ problema (2.21) postoji, jedinstveno je i zadovoljava

$$\hat{X}_T(x) = I\Big(y\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\Big),\ ili,\ ekvivalentno,\ y\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = U'(\hat{X}_T(x)), \tag{2.23}$$

gdje su $x \in dom(U)$ i $y > 0$ u relaciji $u'(x) = y$ ili, ekvivalentno, $x = -v'(y)$.

(iii) Vrijede sljedeće formule za u' i v':

$$u'(x) = \mathbf{E_P}[U'(\hat{X}_T(x))], \; v'(y) = \mathbf{E_Q}\Big[V'\Big(y\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\Big)\Big] \tag{2.24}$$

$$xu'(x) = \mathbf{E_P}\Big[\hat{X}_T(x)U'(\hat{X}_T(x))\Big], \; yv'(y) = \mathbf{E_P}\Big[y\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}V'\Big(y\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\Big)\Big]. \tag{2.25}$$

Dokaz. Tvrdnje (i) i (ii) smo već dokazali u tekstu prije teorema. Stoga, ostaje nam samo još dokazati tvrdnju pod (iii). Formula za $v'(y)$ iz (2.24) slijedi deriviranjem relacije

$$v(y) = \mathbf{E_P}\Big[V\Big(y\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\Big)\Big] = \sum_{n=1}^{N} p_n V\Big(y\frac{q_n}{p_n}\Big).$$

Formula za v' iz (2.25) je očito reformulacija formule (2.24). Navodimo obe tvrdnje da bi naglasili njihovu simetriju s formulama za $u'(x)$.

Korištenjem relacija koje smo naveli u tvrdnji (ii), formula za u' u (2.24) se prevodi u

$$y = \mathbf{E_P}\Big[y\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\Big],$$

dok se formula za u' u (2.24) prevodi u

$$v'(y)y = \mathbf{E_P}\Big[V'\Big(y\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\Big)y\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\Big],$$

što smo upravo provjerili da vrijedi. □

Napomena 2.1.4. *Ponovimo ekonomsku interpretaciju od (2.23)*

$$U'(\hat{X}_T(x)(\omega_n) = y\frac{q_n}{p_n}, \; n = 1, \ldots, N.$$

Iz ove jednakosti slijedi da u svakom mogućem stanju svijeta ω_n, granična korisnost $U'(\hat{X}_T(x)(\omega_n)$ bogatstva optimalnog investitora u vremenskom trenutku T je proporcionalna omjeru cijene q_n odgovarajuće Arrow imovine $\mathbf{1}_{\{\omega_n\}}$ i vjerojatnosti događaja $p_n = \mathbf{P}[\omega_n]$.

Teorem 2.1.3 daje lakši način rješavanja problema maksimizacije korisnosti: izračunamo $v(y)$ pomoću formule (2.22), što se svodi na jednostavan jednodimenzionalan račun. Kada smo izračunali $v(y)$, teorem daje jednostavne formule pomoću kojih možemo izračunati ostale potrebne veličine kao što su $\hat{X}_T(x), u(x), u'(x)$ i tako dalje.

Još jedna važna poruka teorema 2.1.3 je da se funkcija vrijednosti $x \mapsto u(x)$ može također promatrati kao funkcija korisnosti koja ima sve kvalitativne osobine kao i originalna funkcija korisnosti U. Ova tvrdnja ima i ekonomskog smisla: indirektna funkcija korisnosti $u(x)$ označava očekivanu korisnost investitora sa početnim ulogom u iznosu x, kada investitor optimalno ulaže na financijskom tržištu $\tilde{S}$.

Slijedi vrlo jednostavan primjer u kojem ćemo primijeniti rezultate koje smo dobili i pojasnili u ovom poglavlju.

Primjer 2.1.5. *Financijski model je jednoperiodni, $T = 1$, i sastoji se od dvije imovine . Vjerojatnosna mjera $\mathbf{P}$ zadovoljava $\mathbf{P}[g] = \mathbf{P}[b] = \frac{1}{2}$, gdje g i b označavaju dva moguća stanja svijeta, dakle $\Omega = \{g, b\}$. Neka je*

$$S_0^0 = 1 \quad S_0^1 = 1 + r$$

$$S_0^1 = 1 \quad S_1^1[g] = 1 + u \quad S_1^1[b] = 1 + d,$$

gdje je $r > -1$ bezrizična kamatna stopa i $u > r$ označava porast cijena, a $-1 < d < r$ označava pad cijena.
Teoriju smo radili na diskontiranim vrijednostima pa prvo svodimo model na diskontirane vrijednosti:

$$\tilde{S}_0^0 = 1 \quad \tilde{S}_1^0 = 1$$

$$\tilde{S}_0^1 = 1 \quad \tilde{S}_1^1(g) = 1 + \tilde{u} \quad \tilde{S}_1^1(b) = 1 + \tilde{d}, \text{ gdje je } 1 + \tilde{u} = \tfrac{1+u}{1+r} > 1 \text{ i } 1 + \tilde{d} = \tfrac{1+d}{1+r} < 1.$$

Bez smanjenja općenitosti, pretpostavljamo da je $\tilde{u} \geq -\tilde{d}$. Time smo osigurali da vrijedi $\mathbf{E_P}[\tilde{S}_1^1] \geq \tilde{S}_0^1$, tako da optimalni portfelj kojeg želimo izračunati uvijek ima dugu/long poziciju imovine $\tilde{S}^1$. U suprotnom, za $\tilde{u} < -\tilde{d}$ bismo dobili analogni rezultat, ali bismo bili kratki/short za tu imovinu.

Sada želimo izračunati ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbf{Q}$ te ako je ona jedinstvena model tržišta je potpun. $\mathbf{Q}$ je ekvivalentna martingalna mjera ako vrijedi $\mathbf{Q} \approx \mathbf{P}$ i ako su u odnosu na nju diskontirane cijene financijskih imovina martingalni, to jest ako vrijedi $\mathbf{E_Q}[\tilde{S}_{t+1}^i] = \tilde{S}_t^i$. U našem slučaju mora vrijediti:

$$(1 + \tilde{u})\mathbf{Q}[g] + (1 + \tilde{d})\mathbf{Q}[b] = 1$$

$$\mathbf{Q}[g] + \mathbf{Q}[b] = 1.$$

Kada raspišemo ovaj jednostavan sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice dobit ćemo

$$q := \mathbf{Q}[g] = \frac{-\tilde{d}}{\tilde{u} - \tilde{d}} = \frac{r - d}{u - d},$$
$$1 - q := \mathbf{Q}[b] = \frac{\tilde{u}}{\tilde{u} - \tilde{d}} = \frac{u - r}{u - d}.$$

Dakle, pronašli smo jedinstvenu ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbf{Q}$ *iz čega slijedi da je model tržišta potpun pa možemo primijeniti tvrdnje iz teorema 2.1.3.*

Nadalje, neka je dana funkcija korisnosti

$$U(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha} \text{ za } \alpha \in \langle -\infty, 1\rangle \backslash \{0\}.$$

Pomoću formule (2.9) dobijemo njezinu konjugiranu funkciju V

$$V(y) = -\frac{y^\beta}{\beta}, \text{ gdje } \beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

Za fiksni početni ulog $x > 0$*, želimo riješiti problem maksimizacije funkcije korisnosti (2.1) pomoću teorije dulanosti koju smo do sada razvili. Iako je model jako jednostavan, primjer je ilustrativan i poučan.*

Prvo računamo dualnu funkciju $v(y)$ *pomoću formule (2.22)*

$$\begin{aligned} v(y) &= \mathbf{E}\Big[V\Big(y\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\Big)\Big] \\ &= \frac{1}{2}V(y2q) + \frac{1}{2}V(y2(1-q)) \\ &= \frac{1}{2}\Big[-\frac{(y2q)^\beta}{\beta} - \frac{(y2(1-q))^\beta}{\beta}\Big] \\ &= -\frac{y^\beta}{\beta}\cdot\frac{1}{2}\Big[(2q)^\beta + (2(1-q))^\beta\Big] \\ &= V(y)c_V, \end{aligned}$$

gdje je $c_V = \frac{1}{2}\Big[(2q)^\beta + (2(1-q))^\beta\Big]$.

Da bismo izračunali primarnu funkciju $u(x)$ *koristimo činjenicu da su funkcije* u *i* v *međusobno konjugirane i svojstvo konjugiranih funkcija koje glasi da uz danu konstantu*

$c > 0$ i dvi konjugirane funkcije $U(x)$ i $V(y)$, funkcija $cU(\frac{x}{c})$ je konjugirana sa $cV(y)$. Stoga, vrijedi

$$u(x) = c_V U\Big(\frac{x}{c_V}\Big) = c_V \frac{\Big(\frac{x}{c_V}\Big)^\alpha}{\alpha} = c_V^{1-\alpha} U(x) = c_U U(x), \tag{2.26}$$

gdje je

$$c_U = c_V^{1-\alpha} = \Big(\frac{1}{2}((2q)^\beta + (2(1-q))^\beta)\Big)^{1-\alpha}. \tag{2.27}$$

Za fiksni $x > 0$, kritična vrijednost Lagrangeovog multiplikatora iznosi $\hat{y}(x) = u'(x) = c_U U'(x)$ i računamo

$$\begin{aligned}
\hat{X}_1(x) &= -V'\Big(\hat{y}(x)\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\Big) \\
&= -V'(U'(x)) c_U^{\frac{1}{\alpha-1}} \Big(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\Big)^{\frac{1}{\alpha-1}} \\
&= x c_V^{-1} \Big(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\Big)^{\frac{1}{\alpha-1}},
\end{aligned}$$

gdje smo koristili $-V' = (U')^{-1}$ i $V'(y) = -y^{\frac{1}{\alpha-1}}$. Prema tome, vrijedi

$$\begin{aligned}
\hat{X}_1(x)[g] &= x c_V^{-1} \Big(\tfrac{-2\tilde{d}}{\tilde{u}-\tilde{d}}\Big)^{\frac{1}{\alpha-1}} = x c_V^{-1} (2q)^{\frac{1}{\alpha-1}} \\
\hat{X}_1(x)[b] &= x c_V^{-1} \Big(\tfrac{2\tilde{u}}{\tilde{u}-\tilde{d}}\Big)^{\frac{1}{\alpha-1}} = x c_V^{-1} (2(1-q))^{\frac{1}{\alpha-1}}.
\end{aligned}$$

Provjerimo još da se $\hat{X}_1(x)$, zaista, može eksplicitno prikazati u formi

$$\hat{X}_1(x) = x + \hat{h}\Delta\tilde{S}_1^1, \tag{2.28}$$

za neki $\hat{h} \in \mathbb{R}$, ili, ekvivalentno, da vrijedi $\mathbf{E_Q}[X_1(x)] = x$. Računamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{E_Q}[\hat{X}_1(x)] &= \hat{X}_1(x)[g]q + \hat{X}_1(x)[b](1-q) \\
&= x c_V^{-1} (2q)^{\frac{1}{\alpha-1}} q + x c_V^{-1} (2(1-q))^{\frac{1}{\alpha-1}} (1-q) \\
&= x\Big[\frac{1}{2}\Big((2q)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + (2(1-q))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\Big)\Big]^{-1} \cdot \Big[(2q)^{\frac{1}{\alpha-1}} q + (2(1-q))^{\frac{1}{\alpha-1}}(1-q)\Big] \\
&= x\Big[\frac{1}{2}\Big((2q)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + (2(1-q))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\Big)\Big]^{-1} \cdot \Big[\frac{1}{2}\Big((2q)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + (2(1-q))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\Big)\Big] \\
&= x.
\end{aligned}$$

Preostaje nam još eksplicitno izračunati optimalnu strategiju $\hat{h}$ pomoću formule (2.28). Na primjer, za $\omega = g$ vrijedi $\Delta\tilde{S}_1^1 = \tilde{u}$, $\hat{X}_1(x)[g] = x c_V^{-1} (2q)^{\frac{1}{\alpha-1}}$. Kada to uvrstimo u (2.28) dobivamo $x + \hat{h}\tilde{u} = x c_V^{-1} (2q)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ iz čega slijedi

$$\hat{h}\tilde{u} = x\Big[c_V^{-1} (2q)^{\frac{1}{\alpha-1}} - 1\Big]$$

$$\hat{h} = x\Big[c_V^{-1}(2q)^{\frac{1}{\alpha-1}} - 1\Big]\tilde{u}^{-1}. \tag{2.29}$$

Dakle, izračunali smo optimalnu funkciju isplate $\hat{X}_1(x)$ i optimalnu strategiju $\hat{h}$ za koju je funkcija korisnosti investitora maksimalna.

Za kraj, analizirajmo jos specijalni slučaj kada je $\alpha = \frac{1}{2}$ (tada je $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1} = -1$ i $\beta - 1 = -2$). U tom slučaju konstante postaju nešto "ljepše":

$$(2q)^{\frac{1}{\alpha-1}} = \Big(2\frac{-\tilde{d}}{\tilde{u}-\tilde{d}}\Big)^{-2} = \frac{1}{4}\Big(\frac{\tilde{u}-\tilde{d}}{\tilde{d}}\Big)^2,$$

$$c_V = \frac{1}{2}\Big(\frac{\tilde{u}-\tilde{d}}{-2\tilde{d}} + \frac{\tilde{u}-\tilde{d}}{2\tilde{u}}\Big) = -\frac{(\tilde{u}-\tilde{d})^2}{4\tilde{u}\tilde{d}}$$

pa slijedi

$$\begin{aligned}\hat{h} &= x\Big[\frac{-4\tilde{u}\tilde{d}}{(\tilde{u}-\tilde{d})^2}\cdot\frac{1}{4}\frac{(\tilde{u}-\tilde{d})^2}{\tilde{d}^2} - 1\Big]\tilde{u}^{-1}\\ &= x\frac{\tilde{u}+\tilde{d}}{|\tilde{u}\tilde{d}|}.\end{aligned}$$

Bibliografija

[1] F . Delbaen i W. Schachermayer, The Mathematics of Arbitrage, Springer, 2006.

[2] N. Sarapa, Teorija vjerojatnosti, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[3] Z. Vondraček, Financijsko modeliranje I (skripta), 2008. (https://web.math.pmf.unizg.hr/ vondra/1fm16-predavanja.html)

[4] Z. Vondraček, Slučajni procesi (skripta), 2010. (https://web.math.pmf.unizg.hr/ vondra/sp17-predavanja.html)

Sažetak

U ovom radu opisujemo razne financijske modele na konačnim vjerojatnosnim prostorima koji se sastoje od $d + 1$ financijske imovine te se tom imovinom trži u diskretnom vremenu. Pretpostavka da je prostor elementarnih događaja Ω konačan implicira da su svi prostori $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ konačnodimenzionalni što znači da se cijela funkcionalna analiza svodi na linearnu algebru. Model promatramo kao slučajni proces, označavamo ga sa S, budući da su cijene financijskih imovina neizvjesne i slučajne pa ih modeliramo kao slučajne varijable. Prvo, uvodimo definiciju financijskog modela u ne nužno diskontiranim vrijednostima. Zatim, zbog vremenske vrijednosti novca, stvarne vrijednosti financijskih imovina svodimo na njihove diskontirane vrijednosti (vrijednosti svedene na sadašnju vrijednost) koristeći 0-tu financijsku imovinu kao *numéraire* te čitavu teoriju razvijamo na diskontiranim modelima. Također, pretpostavljamo, radi jednostavnosti, da se trguje bez transakcijskih troškova iako u stvarnom svijetu to ne vrijedi.

Pojam arbitraže je jako važan pojam u modernoj teoriji financija. Na stvarnom financijskom tržištu teško je, gotovo i nemoguće, pronaći mogućnost arbitraže, to jest ostvariti profit bez rizika sa 0-net investicijom te iz tog razloga u radu modeliramo matematički model na financijskom tržištu koji ne dopušta mogućnost arbitraže. Glavni rezultat ovog rada je uspostavljena veza između ne-arbitražnih argumenata i martingalne teorije. Taj rezultat je poznat kao Fundamentalni teorem određivanja cijene imovine koji kaže da model financijskog tržišta ne dopušta arbitražu ako i samo ako su diskontirane cijene martingali s obzirom na ekvivalentnu vjerojatnosnu mjeru. Također, teorem nam ukazuje što princip nearbitraže govori o mogućim cijenama slučajnog zahtjeva. Nadalje, opisujemo vezu između jednoperiodnog modela bez arbitraže i višeperiodnog modela bez arbitraže te kako je jako mala razlika između ta dva modela. Nakon što smo opisali osnove tehnike za određivanje cijene i zaštite (hedge) vrijednosnih papira, pokazujemo koja se sve financijska imovina može uzeti kao *numéraire* imovina. Za kraj prvog poglavlje uspoređujemo Kramkovljev teorem o opcionalnoj dekompoziciji sa poznatom Doobovom dekompozicijom za nenegativne supermartingale.

U drugom poglavlju riješavamo problem maksimizacije očekivane korisnosti bogatstva

u zadnjem vremenskom trenutku T te ga riješavamo pomoću teorije dualnosti. Problem pronalaženja, uz dani početni ulog x, optimalne strategije promatramo u slučaju kada je model tržišta bez arbitraže potpun i na kraju dobivene rezultate primijenjujemo na vrlo jednostavnom primjeru binomnog modela s jednim periodom.

Summary

In this paper we describe the various models od financial market with $d+1$ financial assets in the case of finite probability spaces in discrete time. Assumption that the probability spaces are finite implies that all the function spaces $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ are finite-dimensional, thus reducing the functional analytic delicacies to simple linear algebra. The prices of financial assets are uncertain and random so we are modelling them as stochastic variables meaning that a model of a financial market is an $\mathbb{R}^{d+1}$-valued stochastic process, denoted by S. First, we introduce financial model in not necessarily discounted terms. Because of the time value od money, the rest of theory we devote to reducing this situation to a model in discounted terms, using 0-asset as a *numéraire*. We assume, for simplicity, that changing a portfolio does not trigger transaction costs. Although, in real world this assumption is not true.

The notion of arbitrage is crucial to the modern theory of finance. Intuitively, definition of arbitrage is that an arbitrage opportunity is the possibility to make a profit without risk and without net investment of capital. The principle of no-arbitrage states that a mathematical model of financial market shoud not allow for arbitrage possibilities. A basic insight of this paper is the intimate relation between no-arbitrage arguments and martingale theory. This relation is the theme of the Fundamental theorem of asset pricing. Theorem states that a mathematical model of a financial market is free of arbitrage if and only if discounted prices are martingales under an equivalent probability measure. This theorem tell us, also, what the principle of no-arbitrage implies about the possible prices for a contigent clam. We describe the relation between one-period no-arbitrage and multiperiod no-arbitrage model and conclude that there is a little difference between these two models. After we have developed the basic tools for the pricing and hedging of derivative securities, we are showing what assets can be used as a *numéraire*. At the end of first chapter we compare Kramkov's optional decomposition theorem with Doob's decomposition theorem for non-negative super-martingales.

In the second chapter we introduce the problem of maximising expected utility of terminal wealth and solve them by applying the duality theory. We deal with the case of

an arbitrage-free complete market and illustrate results by applying them to very simple example with a one-period binomial model.

Životopis

Zovem se Dina Lordan. Rođena sam 20. rujna 1994. godine u Šibeniku. Nakon završene osnovne škole, upisujem matematičku gimnaziju u Šibeniku. Ispite Državne mature položila sam 2012. godine te iste godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij matematike nastavničkog smjera na Prirodoslovno matematičkom fakultetu. Preddiplomski studij završavam 2015. godine kada upisujem diplomski studij Financijske i poslovne matematike.